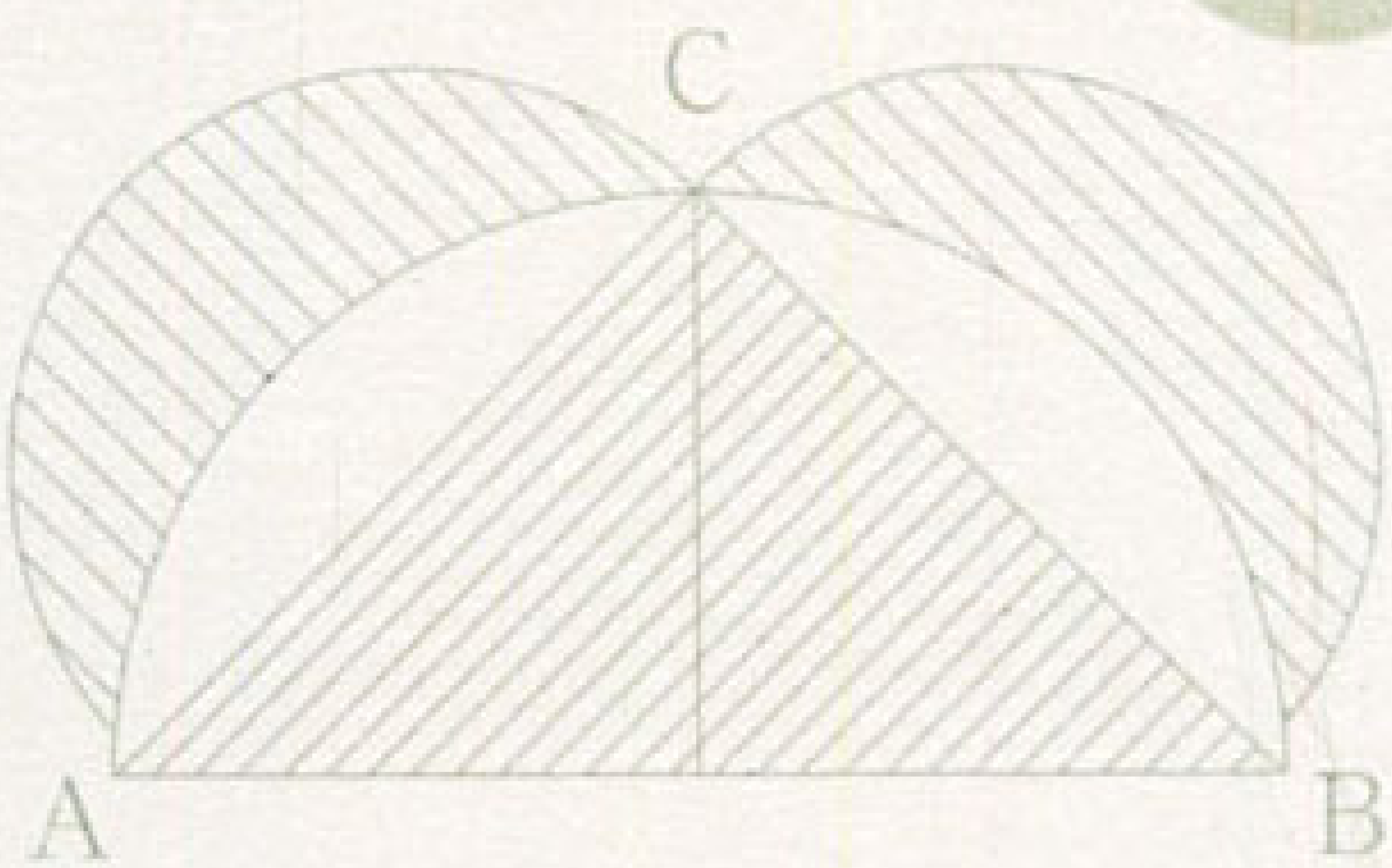
好玩的数学

张景中 主编

陈仁政 著

说不尽的π

你想知道π的30多个名称、10多种符号和170多个值吗？你想到巴黎参观“π宫”吗？你想知道预言“世界末日”和粘黄金鼻子的π迷吗？你想知道“白雪公主”为什么会拒绝“白马王子”求婚吗？　看看这本书，或许你会成为一个“π迷”。



科学出版社
www.sciencep.com

好玩的数学

张景中 主编

说不尽的π

陈仁政 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书图文并茂，生动详尽地叙述了从古到今人类对π不断加深的认识和艰难曲折的探索，以及有关π的各种知识：定义、名称、符号、性质，林林总总的数值让人目不暇接，形形色色的算法引人拍案叫绝，多如牛毛的奇闻趣事让人心旷神怡，五花八门的名题趣题使人赏心悦目，难解难破的谜团雾障令人梦绕魂牵……

本书适合具有中学及以上文化的青少年或成人阅读，也是研究π的重要参考书。

徜徉在π那“依旧”的“涛声”之中，感受阿基米德、祖冲之、金田康正……的魅力，你会流连忘返。

“心会跟π一起走，说好不回头”——看了这本书，或许你也会成为一个“π迷”……

图书在版编目（CIP）数据

说不尽的π/陈仁政著.—北京：科学出版社，2005
(好玩的数学/张景中主编)

ISBN 7-03-014635-2

Ⅰ.说… Ⅱ.陈… Ⅲ.常数-通俗读物 Ⅳ.O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第122493号

丛书策划：李 敏
责任编辑：李 敏 / 责任校对：包志虹
责任印制：钱玉芬 / 整体设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
原创阳光印业有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年1月第 一 版 开本：610×1000 1/16
2005年1月第一次印刷 印张：25 1/2
印数：1—6 000 字数：282 000

定价：30.00元

如有印装质量问题，我社负责调换

《好玩的数学》编委会

主　编　张景中

成　员　（按汉语拼音字母排序）

陈仁政　孙荣恒　谈祥柏　王树禾

吴鹤龄　易南轩　郁祖权

总　序

2002年8月在北京举行国际数学家大会（ICM2002）期间，91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗？不同的人可能有不同的看法。

有人会说，陈省身先生认为数学好玩，因为他是数学大师，他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说，数学枯燥，数学难懂，数学一点也不好玩。

其实，陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩，才兴致勃勃地玩个不停，才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以，小孩子也可能觉得数学好玩。

当然，中学生或小学生能够体会到的数学好玩，和数学家所感受到的数学好玩，是有所不同的。好比象棋，刚入门的棋手觉得有趣，国手大师也觉得有趣，但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味，理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物，很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道：“但得此中味，勿为醒者传”，不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学，要接触数学，或多或少地能理解一

些数学。

早在2000多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说:“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力：“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深

思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i}=1$$

这里指数中用到的 π，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i，就是虚数单位，它的平方等于 -1。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π》和《不可思议的 e》，分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树禾教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回　三次方程闹剧获得公式解　神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树禾教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》，把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使

读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师加德纳25年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自2002年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的

方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等40余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有"柳暗花明又一村"的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第37节，讲了一个"三翁垂钓"的题目。与此题类似，有个"五猴分桃"的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少1024－4＝1020个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有x个，借给它们4个，成为$x+4$个。

5个猴子分别拿了a，b，c，d，e个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a=(x+4)/5$$

$$b=4\ (x+4)/25$$
$$c=16\ (x+4)/125$$
$$d=64\ (x+4)/625$$
$$e=256\ (x+4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $(x+4)$ 应是 3125 的倍数，所以

$$(x+4)=3125k\ (k\ \text{取自然数})$$

当 $k=1$ 时，$x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射-反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 355/113。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 355/113。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 355/113。后来，在夏道行教授所著《π 和 e》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 355/113，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi=3.1415926535897\cdots$，可得 $|355/113-\pi|<0.00000026677$，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π，一定会有

$$|355/113-q/p|<2\times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p-113q|/113p<2\times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 355/113，所以 $|355p-113q|$ 不是 0。但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p<2\times 0.00000026677$$

由此推出

$$p>1/(113\times 2\times 0.00000026677)>16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π，其分母 p 一定大于 16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。

张景中

2004 年 9 月 9 日

代 前 言

圆周率 π 是一个家喻户晓的数学术语。所谓圆周率，通俗地说，就是圆的周长与直径之比，它是一个常数。《墨子·大取》说“小圜之圜与大圜之圜同”，就是指的这种意思。在古代，一个文化传统对圆周率计算的精确程度，往往反映了该文化传统所达到的数学水平，因为圆周率的计算不仅要有熟练的计算技术，而且要用到代数、几何的若干知识，甚至还需要极限思想。

人类各个文化传统，不管进入文明社会的早晚，最先都使用“周三径一”，即 $\pi=3$，几乎无一例外。这个值非常简约，一直到今天，木工师傅还在使用它。而对追求严密的数学家来说，它显然太粗疏。人们力图改进圆周率值。但是，在找到科学的计算方法之前，往往是采用试验的方法。刘歆为王莽制造嘉量时所使用的相当于 3.1547 的圆周率值，大约是试验的结果。随着数学水平的提高，杰出的数学家创造了求圆周率精确近似值的科学方法。就时间的先后与方法的初等、高等而言，可以分为几何的与解析的两种方法。阿基米德（公元前 3 世纪）与刘徽（公元 3 世纪）分别是古希腊和中国（也是西方和东方）这两种数学传统中计算圆周率精确近似值的几何方法的开创者。祖冲之（429～500）使用刘徽的方法，将圆周率精确到 8 位有

效数字，领先世界数坛近千年。德国鲁道夫（1540～1610）在临终前计算出35位数的圆周率，是用几何方法计算圆周率的最好成绩。1579年，法国韦达（1540～1603）提出了数π的解析表达式，开创了用解析方法求圆周率精确值的阶段。1948年，一位英国人和一位美国人计算出π的808位值，是人工计算取得的最高记录。1946年，第一台电子计算机ENIAC诞生。计算机大大缩短了计算时间，3年之后，人们用它计算出2035位的π值。从此，人类进入用机器计算圆周率精确近似值的新时代。使用阿基米德或刘徽的方法，或者解析的方法，从理论上讲，可以计算出任意精确的圆周率，然而，在实际上是不可能的，只能计算到几十位或几百位。而使用电子计算机，计算到多少位，人们也不会感到惊讶。到2002年，人们计算出12 400多亿位的圆周率。相信这个记录也保持不了多久。

尽管几乎人人都对圆周率耳熟能详，实际上却存在不少误解。在一次全国性的歌手比赛上，有一个知识性题目是："谁最早发明了圆周率?"主持者给的"正确答案"是"祖冲之"。这里有两个常识性错误。首先，圆周率是不依人的意志为转移的客观规律，它是一个无理数，还是一个超越数，人们只可能"发现"它的近似值，而不可能"发明"它，题目本身就是错误的。至于发现它是大于3的近似值的方法，是可以"创造"或"发明"的。但是，"最早发明"的桂冠在全世界应属于阿基米德，在国内应属于刘徽，也是轮

不到祖冲之的。祖冲之只是人们认识圆周率的历史长河中的杰出人物之一。实际上，3也是圆周率的一个近似值，我们的先民中是谁最早发现了它，是谁最早发明了发现它的方法？是谁也回答不了的一个问题。显然，在全民族中普及这类科学常识，任重而道远。陈仁政先生等积20多年的时间，坚忍不拔，不畏辛劳，收集、积累有关圆周率的资料，经过梳理，撰成此书，是一件十分有意义的事情。本书与同类作品相比，生动有趣，通俗易懂，资料新颖，内容更加丰富，有关中国的材料也更加详备，有的内容还有创新，相信它会发挥有益的作用。

中国科学院自然科学史研究所
郭书春
2004年11月

目　录

总序

代前言

第一章 圆周率的定义——多角度给 π“照相”…………1

1.1 没褪色的“黑白照”——用圆周长和直径来定义…………1

1.2 换个角度也无妨——用圆面积和半径来定义…………3

1.3 还是“彩照”吸引眼球——各家定义“八仙过海”…………4

1.4 爱因斯坦能帮忙吗——盼着你的“三月小船”…………5

第二章 圆周率的名称——世人给 π 改“绰号”…………7

2.1 古率(周三径一之率、径一周三之率)…………7

2.2 阿基米德数(阿氏率、亚氏率、弱率)、托勒密之值…………8

2.3 歆率…………9

2.4 衡率…………10

2.5 徽率(徽术、阿利亚巴塔之值)…………11

2.6 承天率(皮延宗率)、蕃率、宗率、粗率(实用率、约率、“疏率”、强率)、智率(陆绩率)…………12

2.7 祖率(祖冲之分数、密率、姜岌之率、奥托率、梅蒂尤斯数或安托尼兹率)、三率…………15

2.8 约率“摇身一变”成“疏率”…………18

好玩的数学

2.9 误解祖率“祸”起三上义夫…………20

2.10 正数、朒数、盈数…………21

2.11 鲁道夫数…………22

2.12 圆率(圜率、周率、圆周法)…………22

2.13 数 π(圆的周长和直径的比)…………22

第三章 圆周率的符号——π 也会“变脸”…………24

3.1 由两副“面具”组成的“脸谱”…………24

3.2 一副“面具”“不经意”走进舞台…………25

3.3 摇身一变无人能识…………27

3.4 圆周率的符号在中国…………28

3.5 “不务正业”的 π…………28

第四章 圆周率的性质——揭开 π 的“庐山真面目”…………30

4.1 人文初始之后对 π 的认识…………32

4.2 无理数时期对 π 的认识…………33

4.3 超越数时期对 π 的认识…………39

4.4 寻找新规律时期对 π 的认识…………40

第五章 从 1 位到 12 411 亿位——历史上的 π 值及计算方法…………49

5.1 混沌初开之后——人类的第一个 π 值…………49

5.2 看起容易做起难——粗略 π 值“百花齐放”…………55

5.3 从阿基米德到格林贝格——古典法算 π 及数值…………75

5.4 微积分实现大突破——分析法算 π 及数值…………108

5.5 电子计算机算 π——“芝麻开花节节高”…………121

5.6 从星条旗到芝麻——概率法算 π 及数值…………138

5.7“单摆公式”显神通——物理实验法算 π…………146

5.8 并不都要从“1”开始——计算 π 的单个数字…………147

第六章 变“简”为“繁”出奇制胜——π 的无穷表达式…………150

6.1 神奇美妙的无限连分式…………150

6.2 和谐“奇怪”的无穷乘积…………151

6.3 无穷级数变幻莫测…………155

6.4 算 π 妙招:反正切式…………165

6.5 精彩纷呈的其他表达式…………171

第七章“大明星”不是冒牌货——π 与名题…………174

7.1 π 与化圆为方…………174

7.2 作图求 π“十面埋伏”…………195

7.3 π 与超越数、希尔伯特第 7 问题…………202

7.4 π 与近似计算…………205

7.5 π 与连分数、最佳逼近理论…………206

7.6 π 与弧度制…………211

7.7 π 与圆方率…………214

7.8 π 与空隙…………216

7.9 π 与转圈悖论…………218

第八章 好伙伴形影不离——无处不在的 π…………223

8.1 π 与伯努利难题…………223

8.2 π 与伯努利数…………226

8.3 π 与欧拉公式…………229

8.4 π 与斯特林逼近…………230

8.5 π 与黄金分割…………231

8.6 π 与曲线长度…………233

8.7 π 与曲线图形面积…………233

8.8 π 与旋转体的体积…………236

8.9 “数学天空”任 π 飞…………237

8.10 “科学海洋”任 π 游…………238

第九章 增智能健身心——π 的奇趣…………240

9.1 杀人魔逢 π 栽跟斗…………240

9.2 π 中素数有几何…………241

9.3 π 与奇数如此巧合…………242

9.4 π 与根式这样“多角恋”…………243

9.5 西文字母里藏迹隐踪…………243

9.6 纵横图中的秘密…………244

9.7 “π 痴”们如何编“π 诗”…………246

9.8 “老外”赋“π 诗”万紫千红…………252

9.9 π 与“圆方病患者”…………256

9.10 愚蠢的巴霍姆和精明的狄多女王…………257

9.11 游览巴黎不妨光顾“π 厅”…………259

9.12 谜语、游戏和 π…………261

9.13 π 与 50,144,360“天作地合”…………263

9.14 π 的“对称”这般神奇…………264

9.15 π 也是“天地英雄”…………265

9.16 π 和爱公生日同庆…………266

9.17 π 英雄击败“魔鬼机器”…………268

9.18 $e^{\pi\sqrt{163}}$ = 262 537 412 640 768 744 吗…………269

9.19 法庭上侃 π 相去天渊…………270

9.20 “外星人”看 π 与“众”不同…………270

9.21 阿公的“准确值”不如“近似值”…………271

9.22 圆和球，两张天下最美的脸…………272

第十章 难理解却易明白——研究 π 的价值何在…………276

10.1 对数系理论做贡献…………277

10.2 其他数学成就应运而生…………278

10.3 计算机进展的指标和实用前的特殊试验手段…………279

10.4 认识“计算机对数学的影响”更加深刻…………282

10.5 培养记忆的一种良方…………283

10.6 检验公式优劣的特殊手段…………289

10.7 数学需要时刻严密吗…………290

10.8 π 衡量一个国家的数学水平…………292

10.9 体会“认识自然不会穷尽”…………293

10.10 基础科研对急功近利说“不”…………294

第十一章 等您大显身手——有关 π 的谜…………298

11.1 谁是安托尼兹…………298

好玩的数学

11.2 鲁道夫是哪一国的人…………299

11.3 王蕃 142/45 的来历及王蕃和刘徽谁先…………300

11.4 3927/1250 来自何人…………301

11.5 3927/1250 是如何算得的…………307

11.6 祖冲之是如何得到密率的…………308

11.7《缀术》和它的失传之谜…………310

11.8 盈朒二限是如何得到的…………312

11.9 π 有十进制的并行计算公式吗…………314

第十二章 反伪打假无尽期——谈圆算 π 也要讲科学…………316

12.1 π 是有理数吗——伯熙瓦自摆"乌龙"…………316

12.2 只有前 6 位相同——一个西部农民能完成"革命"吗…………318

12.3 法律决定 π 值——不该发生的"笑话"…………319

12.4 "π 跟石头一起走,说好不回头"——金字塔前的神话…………321

12.5 美缘为何"终虚话"——倒霉的不仅是"白马王子"…………325

12.6 从第十行星到 π 值——无须"神化"八卦…………327

第十三章 附录——丰富资料供你查询…………329

13.1 π 值大全表…………329

13.2 π 的数表…………337

13.3 人名索引…………340

参考文献…………372

后记…………377

◎第一章

圆周率的定义
——多角度给 π“照相”

数学，作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志，缜密周详的推理以及对完美境界的追求。

——柯朗

各国的圆周率：英 number π(ratio of the circumference of the circle to the diameter)；法 nombre π；德 Ludolphsche Zahl, Ludolphian Number；俄 числоп；日 円周率；希腊 π ——世界通用。

各家的圆周率：数学家说是圆周长和直径的比；工程师说是约为 3.14；物理学家说是 3.1416，误差小于 0.0003%；天文学家说是 3.141 592 65，误差约 1.146×10^{-9}。

1.1 没褪色的“黑白照”——用圆周长和直径来定义

小学数学书上说，圆周率 π 是（欧几里得）平面上圆周长

和直径的比（值）。

我们不难发现，这个定义中有两个问题。第一，圆周是曲线，曲线的长与直线的长不同，它是什么意思？第二，任何圆的周长和直径的比（值）都一样吗，即都是同一个常数 π 吗？如果是，应该加以证明。

首先，我们来看“圆周长”是什么意思。

在平面几何里我们知道，当圆内接（或者外切）正多边形的边数无限增加时，它的周长就接近于圆周长。于是就得到圆周长的定义：当圆内接正多边形的边数用加倍的方法无限增加的时候，这些正多边形的周长的极限叫圆周长。

当然，要说明上面这个定义是合理的，首先要证明圆内接正多边形的周长存在极限。对于学了数列和极限的人，做到这一点并不难，因此这一任务留给读者。

事实上，从圆的任一内接正多边形出发，用任何方法——不一定用“边数加倍法”，使它的边数无限增加，各条边的长度就无限缩短，那么，这些多边形的周长也有一个极限，这个极限就是圆周长。这就得到圆周长的另一个定义：当圆内接正多边形的边数无限增加时，内接正 n 边形的周长 p_n 就接近于一个确定的值，这个值叫圆周长 C。即：p_n 的极限是 C。当然，以上两种定义并无本质区别。

有了圆周长的定义，下面我们来证明圆周长 C 和直径 D 的比——C/D 是一个与 D 的大小无关的常数。为此，设圆内接正 n 边形的边长是 a_n。

如图 1-1，以 D' 为直径作⊙O 的同心圆，并且把这个圆的周长记做 C'，它的内接正 n 边形的边长、周长分别记做 a'_n 和 p'_n。

从 O 到正多边形顶点的半径把这两个正 n 边形各分成 n 个三角形。很明显，这两个圆内接正 n 边形相似，所以 $a_n : a'_n = (D/2) : (D'/2)$。就是 $a_n : (D/2) = a'_n : (D'/2)$。因此，$p_n : D = p'_n : D'$。取极限后就得到 $C : D = C' : D'$。这就说明 C/D 是一个常数，把这个常数记做 π，就得到我们熟悉的 $C = \pi D$。

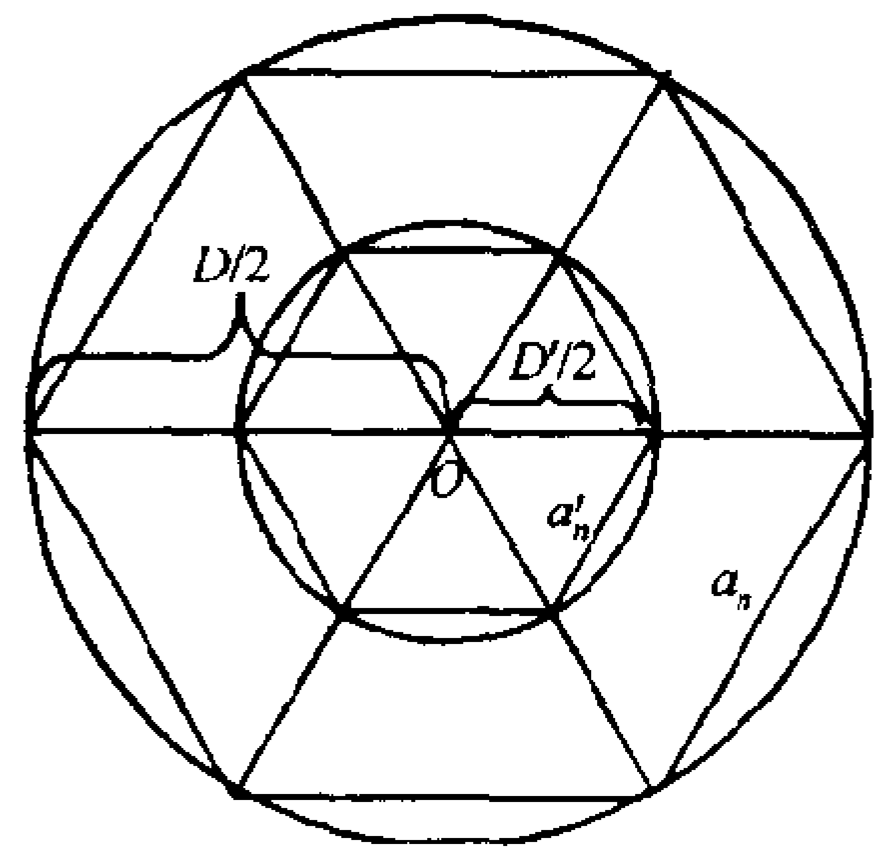


图 1-1

这种 π 的定义，是一张传统的“照片”，但是还没有“褪色”—— 直到今天还在用。

1.2 换个角度也无妨—— 用圆面积和半径来定义

圆周率是一个常数，还可以换个角度——从求圆面积和半径的比来证明。

任取半径是 R 的圆，作此圆的内接正 n 边形，并把多边形的面积记做 S_n。1.1 中说过，当 n 无限增加时，内接正 n 边形接近于圆，p_n 接近于 C；同时，S_n 也就接近一个确定值，这个值叫圆的面积 A。也就是说，当 n 无限增加时，内接正多边形面积组成的无穷数列 S_3，S_4，S_5，S_6，…，S_n，……的极限是 A。

现在证明：圆周率 π 又是 A 和 R 的平方的比，即（1）$A = \pi R^2$ 成立。事实上，这时 $D = 2R$，而 n，a_n 和圆内接正 $2n$ 边形的面积 S_{2n} 之间有（2）$S_{2n} = nRa_n/2$ 和（3）$p_n = na_n$。其中（3）成立是显然的，下面我们来证明（2）也成立。

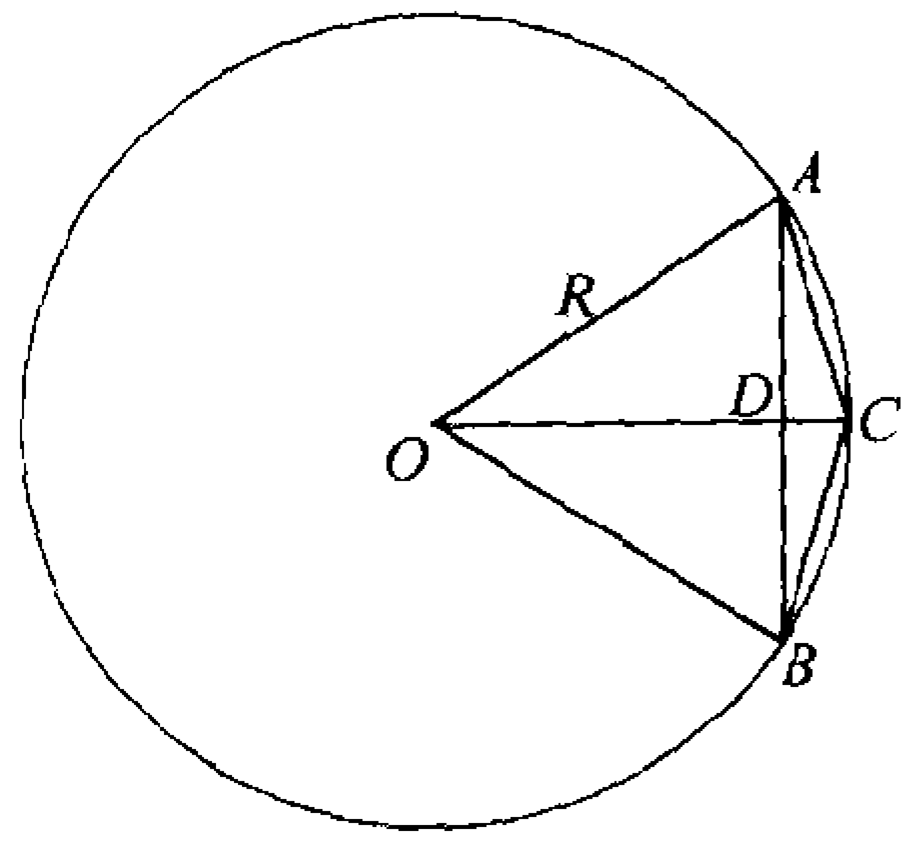


图 1-2

如图 1-2，作⊙O 的内接正 $2n$ 边形并联结它的中心和顶点，这 $2n$ 条连线把它分成 $2n$ 个三角形。把其中相邻的两个三角形记做△OAC 和△OCB，这时，AB 与 OC 垂直相交于 D，于是有（4）△AOB 的面积 $= OD \cdot AB/2$ 和（5）△ACB 的面积 $= CD \cdot AB/2$。而 $AB = a_n$ 是圆内接正 n 边形的一边，又 $OD + CD = OC = R$。因此，从（4）和（5）就可以得（6）△OAC 的面积 + △OCB 的面积 = △AOB 的面积 + △ACB 的面积 = $(OD + CD) \cdot AB/2 = Ra_n/2$。

而圆内接正 $2n$ 边形是由 n 个这样的相邻三角形组△OAC 和△OCB 拼成的，因此由（6）就得到（2）。

从（2）和（3）就可得到（7）$S_{2n} = p_nR/2$。

当 n 无限增加时，S_{2n} 趋向于 A，p_n 趋向于 C，所以（7）的两边分别趋向于 A 和 $CR/2$，而 $CR/2 = \pi DR/2 = \pi R^2$，这就得到（1）。

于是，我们就换了一个角度——用圆面积来定义了 π。

1.3 还是“彩照”吸引眼球——各家定义“八仙过海”

显然，原则上任何含 π 的公式都可用来定义 π。例如，由球体积公式 $V = 4\pi R^3/3$ 就可以得到 $\pi = 3V/(4R^3)$。于是我们可以说：圆周率 π 是球体积三倍和球半径的三次方的四倍的

比，等等。不过，很显然，这类定义不如1.1和1.2的方法方便，所以我们不打算继续这样给它“拍照”。

我们要说的是另一类定义——给它拍几张打破“传统”的“彩照”。

数学家们都说π是$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$的值。而稍懂微积分的人都知道，这个式子表示的是一个单位圆——半径为1的圆的面积。此外，也可以证明$\pi=\int_0^1 \mathrm{d}x/\sqrt{1-x^2}$。

1719年，一位最先使用虚数的业余数学家——意大利法格纳诺（1682～1766），将π定义为$4\ln[(1-i)/(1+i)]^{i/2}$。

另一位波兰数学家赫奈·朗斯基（1776～1853）则别出心裁，说“数π的绝对意义是$(400/i)[(1+i)^{1/\infty}-(1-i)^{1/\infty}]$”。

而当代美国学者、国际知名的电脑书籍作家大卫·布拉特纳（David Blatner）给出了π的另一种“定义”：某个数在0和2之间，且它的余弦值为0，那这个数的两倍就是π值。

由上可见，不但从几何的角度可以给π“拍照”，而且从代数和数学分析、解析几何等多个角度都可以给π“拍照”，从而得到一张张“回头率”高的“彩照”。

1.4 爱因斯坦能帮忙吗——盼着你的“三月小船”

乘着三月黑色的小船
爱因斯坦
……
从复杂的数学中崛起
矗立在水仙花丛中

春风吹拂
从四个方向，有冷有热
摇曳着那些花朵

这是美国诗人威廉姆·卡罗斯·威廉姆斯，发表于1921年的长诗《水仙花的圣·弗郎西斯·爱因斯坦》中的一小段。诗中"水仙花"，指思想自由的爱因斯坦和革命性的广义相对论。诗的标题中的"圣·弗郎西斯"是法语人名，含"自由"之意，不但指思想自由的爱因斯坦，也隐喻爱因斯坦给美国人带来了关于自由的新观念。

对于圆周率的定义——不，不仅仅对"定义"，而是对整个圆周率的研究，作者盼望着读者您，也当一回"爱因斯坦"，驾驶"三月黑色的小船"，给我们"带来关于自由的新观念"吧！

◎第二章

圆周率的名称——世人给 π 改“绰号”

除了变，一切都不能长久。

——雪莱

现代人称 π 为“圆周率”，但历史上世界各国却给它取了许多“绰号”，而不少已尘封在浩如烟海的历史文献之中。原则上讲，任何一个得出当时领先的 π 值的人，都可以获得一个与圆周率有关的命名，使 π 增加一个“绰号”。但事实上却不尽如此。例如，英国数学家威廉·山克斯（1812～1882）用了30年时间，在1873年将 π 算出708位（后人发现从第528位小数起出错），这一“世界纪录”保持了73年，但却没有看到“山克斯率”的名称。所以，本书提到的有关 π 的名称，都以有文献记载为准。

2.1 古率（周三径一之率、径一周三之率）

人类最早使用的粗糙圆周率是3，这个值被后人称为“古

率”。但这“3”最早起于何时，已“穷远不可追问”。但在我国，木工师傅有句从古流传下来的口诀可以作证：“周三径一，方五斜七”。这个口诀的意思是，直径为 1 的圆，周长大约是 3；边长为 5 的正方形，对角线之长大约是 7。



图 2-1　刘徽

中国唐初国子监算学馆中规定“算经十书”为课本。其中最早的一本叫《周髀算经》，这本书成书不晚于公元前 1 世纪，是一本解释盖天说和四分历的天文学著作，由多人经多个朝代写成。其中的“卷上”记述了约公元前 1100 年周公与商高的问答。其中有“商高曰‘数之法出于圆方’”，下面有赵爽（3 世纪）约 222 年的注“圆径一而周三”的记载。此外，其他中国古代文献如《周礼考工记》中也有相同的记载。

中国魏晋时期的数学家刘徽（3 世纪）（图 2-1）于 263 年注《九章算术》，把圆周率称为“周三径一之率”，这是古率的又一个名称，它在一些文献中被称作“径一周三之率”。由此可见，古率 3 在中国古代刘徽之前已广为流传。

2.2 阿基米德数（阿氏率、亚氏率、弱率）、托勒密之值

古希腊数学、物理学家阿基米德（公元前 287～前 212），

率先将 π 值算到两位小数 3.14。为了纪念他的这一伟大贡献，后人将 3.14 叫做“阿基米德数”或“阿氏率”。中国学者郑太朴将美国 D.E. 史密斯等所著《数论尺规作图及周率》一书中的阿基米德译为“亚几默德”，并把 22/7 称为“亚氏率”。

一些人称 3.14 或 157/50 为“弱率”。

古希腊天文学家、数学家托勒密（约 85 至 100～165 至 170）在制作弦表时得到的 π 值为 $3.141\dot{6}$。中国桥梁学家茅以升（1896～1989）则将它称为“托勒密之值”——原文为“Ptolemy（即中国盛称多禄某）之值”。不过，茅以升却说他算得的 π 值是 3.141 552。

2.3 歆率

中国汉代数学家刘歆（约公元前 50～公元 23），在公元 9 年王莽（公元前 45～公元 43）篡位后为国师，但仅过了 14 年，就被王莽杀害。他任国师期间曾经受命于王莽，作“律嘉量”又称“嘉量斛”或“律嘉量斛”——“龠、合、升、斗、斛五量备于一器”的铜制圆柱形标准容器，得到的圆周率为 3.179 024 7 或 3.1547，这两个值都叫“歆率”（或“刘歆率”）。它们的来源见 5.2 的 2.（16）和（25）。

歆率虽然不很准确，但在中国却是第一个打破古率 3 而寻求更准确 π 值的先导，所以被许多人提及，在中国数学史上占有重要地位。

不过，有人却认为“歆率”是一个误称。例如，邹大海在《中国科技史料》2001 年 22 卷 2 期 99～108 页撰文说，李俨（1892～1963）在早年发表的《中国数学源流考略》中说“炎

汉初兴，张苍（约公元前 250～前 152）……厥后刘歆以圆率 π=3927/1250 号称歆率”。这是当时未及深考，误信了以前岑建功（约 18 世纪）《割圆密率捷法序》的说法，把《九章算术注》中，关于“王莽铜斛”与求 π 的近似值 3927/1250 两段文字连读所致。3 年之后，钱宝琮（1892～1974）发表文章辨明此事，以后李俨就不再提这个歆率，在《中国数学大纲》修订本中还说明岑建功的说法“属误记。此率疑出于祖冲之”。所以，李俨提到的歆率 3.1547 并非历史文献所载，而是后人根据王莽铜嘉量所载的数据推算出来的。

2.4 衡率



图 2-2　张衡

中国东汉杰出的科学家和文学家张衡（78～139）（图 2-2），也是一位杰出的画家——东汉六大画家之一。他曾在汉安帝期间三度担任主管天文、历算的太史令。他曾著有中国第一部天文学的理论著作《灵宪》。在这本书中，他曾取 π=730/232 = 3.146 551 … = 3.1466。本书中，我们将“=”与“≈”混用为“=”。

此外，唐代《开元占经》中载有张衡的 π=92/29=3.172413…=3.1724。

张衡是一位世界公认的古代科技巨人，他的成就不胜枚

举。例如，世界上第一架能测定天象的仪器——浑天仪，就是他制成的。又如，他还在132年制成了能测报地震的地动仪。为了纪念他的重大科技贡献，国际月面地名命名委员会把月球背面东经 112°，北纬 19° 的一座环形山命名为“张衡山”。

说到“张衡山”，使人联想起一件趣事。这就是，月球上以中国人命名的古人，本书搜集到的共 5 人，而对圆周率有研究的就占 3 人!

这 5 人除张衡外的 4 人是：祖冲之（5 世纪）、郭守敬（1231～1316）、万户（约 15 世纪）、石申（战国时代）。祖、郭二人将在后面章节中介绍。

张衡还在《算罔论》中说“周率一十之面，开方除之，得 3.16 有奇”；这里，“奇”是多的意思。可见他也曾经取 $\pi=\sqrt{10}=3.162\cdots=3.16+$。这与清代数学家李潢（? ～1811 或 1812）的考证是一致的。张衡得到 $\sqrt{10}$的时间是 129 年。

以上这三个值（730/232，92/29，$\sqrt{10}$）都应该称为“衡率”。不过，一些文献说的“衡率”却专指 $\sqrt{10}$。此外，南宋数学家秦九韶（约 1202 或 1209～约 1261），在 1247 年写成的九卷本《数书九章》的环圆三积术中，也提到张衡的 $\sqrt{10}$。

虽然 $\sqrt{10}$不够准确，但却比印度、阿拉伯学者们相同的结果早几百年。

2.5 徽率（徽术、阿利亚巴塔之值）

刘徽用他独创的“割圆术”又称“徽术”，将 π 值计算到小数点后 2 位（157/50）或 4 位（3927/1250），即 3.14 或 3.1416。这两个值都被称为“徽率”或“徽术”。而宋代数学

家李籍（约 11 世纪）的《九章算术音义》中，则专门称 157/50 即 3.14 为“徽术”。

约 500 年，印度数学家阿利亚巴塔（约 475～550）也求得 $\pi=3.1416$，所以有人把它称为“阿利亚巴塔之值”。

2.6 承天率（皮延宗率）、蕃率、宗率、粗率（实用率、约率、“疏率”、强率）、智率（陆绩率）

中国东晋与南北朝时期的数学家何承天（370～447），在 443 年编制《元嘉历》的时候，在《浑天象体》中说：“周天三百六十五度三百四分之七十五天，天常西转一日一夜，过周一度，南北两极，相距一百一十六度三百四分之六十五强，即天径也。”可见他得到了 $\pi=(365+75/304)/(116+65/304)+=(111\,035/35\,329)-=3.1429-$，这个数与 22 / 7 很接近，不少文献称这个数为“承天率”。例如《中国算学史·上》58 页。

不过，《钱宝琮科学史论文选集》56 页则说，“此率承天未言其为自创，或即为皮延宗率亦未可知。抑隋史卤灭，误承天为延宗也”。这里提到的皮延宗（5 世纪），是南北朝时期的数学家。

而 1981 年第 12 期《数学通报》33 页说，“祖冲之还特地称何承天的 22/7 为疏率”。不知这一说法有何依据？但是，我们在 2.8 中将会看到，“疏率”是一个误称。

德国数学史家舍普勒（Herman C. Schepler）写的《π的年表》中，记有“450. Wo（China）3.1432 +. Geometer.”。这是指“几何学家（Geometer）”何承天在 450 年得到 3.1432 +。

但是，《钱宝琮科学史论文选集》56 页则说：“日人三上义夫（1875～1950）据 Muramatsu's Sanso。1664，说，何承天率为 3.1432+，当有桀误。”另外一个疑点是：450 年时，何承天已谢世 3 年。

《三国志·吴志》、《晋书·天文志》、《宋书·卷二十三·天文志》都记有“庐江王蕃善数术，制浑仪，立论考度曰，考之径一不啻周三，率周百四十二，而径四十五”等内容。可见三国时吴国数学家王蕃（228 或 229～259 至 268）的 $\pi = 142/45 = 3.1\dot{5}$，所以这个值被称为“蕃率”。它被得到的时间约 250 年。

此外，《隋书》和《宋书·律历志·何承天传》等，都有南北朝数学家皮延宗认为 $\pi = 3$ 不准确，要“设新率”的记载，但他算得的 π 值“已不可考，是仅雪泥鸿爪，供后人惋惜而已”。这个“已不可考”的 π 值，人们将它称为“宗率”。事实上，《律历志》将刘歆……皮延宗并列，那么将他们的名字都与 π 联系在一起就很自然了。这里的“雪泥鸿爪”，指难以找寻的、已经远逝的事物，来自北宋时代的大诗人苏轼的《和子由渑池怀旧》：

人生到处知何似，
恰似飞鸿踏雪泥！
泥上偶然留指爪，
鸿飞哪复计东西？
……

《钱宝琮科学史论文选集》51 页指出，“方以智谓 $\pi = 52/17$，及程大位《算法统宗》所指‘智率’25/8”。这里的“智率”，是因为明末哲学家、思想家、数学家方以智（1611～1671）得名。52/17 和 25/8 都叫智率。程大位（1533～1593）

也是一位明代数学家。

智率 25/8 还被美国数学史家达维德·史密斯（1860～1944）在他的名著《数学史》中称为“陆绩率”。但实际上阮元在《畴人传》中却说，王蕃说陆绩仍沿用“周三经一”的旧率。这里的陆绩（3 世纪），是中国三国时期吴国的数学家。

根据二十四史之一的《隋书》卷十六《志》第十一《律历》（图 2-3）记载，中国南北朝时代的数学家祖冲之在他的名著《缀术》——即《缀经》中给出“约率”22/7。舍普勒写的《π的年表》，将“约率”译为“inaccurate”，其意直译为“不准确的（值）”。这个值被印度数学家婆什迦罗（约 1114 或 1115～1178 至 1185），在 1150 年称为“粗率”和“实用率”。这两个名称都记载于他 1150 年的《丽拉瓦提》一书中。“丽拉瓦提”意思是“美丽”，相传是他的妻子或第二个女儿的名字。


以御功程積實六曰均輸以御遠近勞費七曰盈朒以御
隱雜互見八曰方程以御錯糅正負九曰句股以御高深
廣遠皆乘以散之除以聚之齊同以通之今有以貫之則
算數之方盡於斯矣古之九數圓周率三圓徑率一其術
疏舛自劉歆張衡劉徽王蕃皮延宗之徒各設新率未臻
折衷宋末南徐州從事史祖沖之更開密法以圓徑一億
爲一丈圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽
朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽正數在盈
朒二限之間密率圓徑一百一十三圓周三百五十五約
率圓徑七周二十二又設開差冪開差立兼以正圓參之
指要精密算氏之最者也所著之書名爲綴術學官莫能
究其深奧是故廢而不理

图 2-3 《隋书》中关于祖冲之圆周率的记载（1306 影印本）

孙炽甫还称 22/7 为“强率”。

关于“疏率”的介绍，见 2.8。

从弱率 3.14 是 π 的不足近似值，和强率 22/7 是 π 的过剩近似值来看，“弱”指“不足”，“强”指“过剩”。

2.7 祖率（祖冲之分数、密率、姜岌之率、奥托率、梅蒂尤斯数或安托尼兹率）、三率

在《隋书》中，还记载有祖冲之得到的“密率”355/113。舍普勒写的《π 的年表》将它称为“accurate”，直译成中文是“准确的（值）”。

根据中国数学史家梁宗巨（1924～1995）在《数学历史典故》241 页中的考证，这个“准确的值”，又被日本数学史家三上义夫在 1913 年出版的英文本《中日数学发展史》第 50 页中，称为“π 的祖冲之分数”。此外，他与美国哥伦比亚大学的数学史家达维德·史密斯（1860～1944）在 1914 年合著的《日本数学史》中，也有同样的称呼。

梁宗巨接着说，后来，中国著名桥梁学家茅以升（1896～1989），在 1917 年 4 月出版的《科学》杂志 3 卷 4 期《中国圆周率略史》一文中第 419 页写道：“冲之密率，千载而（梁把原文“以”误引为“而”——本书作者）后，西洋始有发见。……日畴三上义夫，以此率源于中国，尝有建议，拟命为祖率。他年举世景从……”（图 2-4）。其后，三上义夫在 1929 年原著、1934 年由林科棠译为中文，在商务印书馆出版的《中国算学之特色》这本书中，又反过来引用茅以升这段话，说“予在拙著《中日数学发展史》中，言此率称祖率为适当”。三

上义夫在同一时期的日文著作《东西数学史》104 页中提到这件事，也引了上述茅以升的文章。这就是“祖率”一词的来源。

第四期　　中国圆周率略史　　419

五分九厘二毫有奇,即是千寸徑之周圍也.以一百一十三乘之,果得三百五十五,故言其法精密."按冲之密率,千載而後,西洋始有發見[50].其時彼都,猶引爲最精,則中國圓率,爲世界之先,何有疑義.惜國學不振,此率已爲西人剽竊,即近代學子,亦幾忘其所自[51].古人心血,逝等流水,爲可慨已.日儒三上義夫,以此率源於中國,嘗有建議,擬命爲祖率[52].他年舉世景從,亦所以酬先民之苦志者矣.吾國篤學君子亦有聞風興起者乎.德儒蘇本[53]謂四位以內之數,無兩數相與,較此爲密者.則祖率之精之簡,固足空前絕後者也.'數理精蘊'採定此率,爲近代算籍援用之祖,然持以入算,仍不多見.中國泥古不變之習,爲厲若此,殆亦科學紓緩之原歟.

图 2-4

也就是说，“祖率”是三上义夫 1913 年在《中日数学发展史》中称“π的祖冲之分数值”355/113 的中译名，而这一中译名最早出自茅以升的《中国圆周率略史》中，是专指祖冲之的密率即 355/113。

此外，解恩泽、徐本顺主编的《世界数学家思想方法》一书 157 页也说，三上义夫在 1912 年提出应称 $\pi = 355/113$ 为“祖率”。

由此可见，“祖率”这个名称来自于日本数学史家三上义夫，是指“π的祖冲之分数值”，也就是“密率”即 355/113。而且，“祖率”绝不是指祖冲之的 22/7，355/113，$3.141\,5926 < \pi < 3.141\,592\,7$ 这三项算π成果，也绝不是指圆周率。

但是，《中算导论》387页却说，祖冲之“算学功绩甚伟大，……予在《中日算学发达史》言此率3.141 592 6<π<3.141 592 7称祖率为适当。”这种说法，与“祖率指355/113”的说法不同。哪种是三上义夫的原意，只有看他的原文才能判定。

为此，我们查阅了英文本《中日数学发展史》50页的原文是：“……在近代欧洲，直到1585年它才被荷兰数学家、梅蒂尤斯之父安托尼兹获得。因此中国人拥有这个最不寻常的圆周率分数值，要比欧洲人早整整一千多年。有鉴于此，我们极力主张以后称它为‘π的祖冲之分数’”。由此可见，三上义夫的原意是，祖率即密率是指355/113。

茅以升还在《中国圆周率略史》中，将古率、徽率、密率合称“算书”“三率”。

此外，在前述婆什迦罗的《丽拉瓦提》中，也有“密率”一词，不过，他不是指的355/113，而是指3927/1250。

在祖冲之之后大约1100年的1573年，德国奥托（约1550～1605）也发现了355/113，所以德国人称这个值为“奥托率”。

除奥托外，另一位欧洲人梅蒂尤斯即安托尼兹（?），在1585年也得到355/113，所以这个值又被称为“梅蒂尤斯数”或“安托尼兹率”。这就有“直到1585年……获得”这话。

更晚的1674年，日本数学家古郡之政也用过355/113。

有人说，中国还将圆周率称为“密率”。但显然这里的“密率”已不是指355/113了。

唐代数学家李淳风（7世纪）在他注《九章算术》有关圆面积问题的答案下，添上“按密率”计算所得的答案，而

他取的圆周率是22/7，显然他误以为22/7是“密率”。因此，后人误认为22/7是“密率”的不少，这都是李淳风等注释的谬误引起的。可见“密率”一词，也是李淳风等对22/7的误称。

茅以升说，“某校校刊，误为姜岌之率”。这里“姜岌之率”是指祖冲之的密率355/113。但不知“姜岌”是谁？

从“粗率”（“约率”——误称“疏率”）22/7没有“密率”355/113准确来看，前者“粗”、“约”、“疏”指“粗略”，后者“密”指“精密”。

2.8 约率“摇身一变”成“疏率”

不少人将祖冲之所说的约率即22/7称为“疏率”。这种称呼对吗？

梁宗巨在《数学历史典故》的240页说：“22/7明明写的是‘约率’，但相当多的文章却误写成‘疏率’。这可能出自一个偶然的印刷上错误（或笔误）。如章克标《算学的故事》（开明书店，1935）p.140正确地写成约率，但在p.201上却误写为疏率。”

遗憾的是，“改名换姓”后的“疏率”却广为流传并持续至今。

数学大师华罗庚（1910～1985）的疏忽，也许是这一误称至今流传的重要原因。

在1951年2月10日《人民日报》3版上，华罗庚在《数学是我国人民所擅长的学科》（后被1951年出版的《认识伟大的祖国》等书转载）中提到，“（祖冲之）用22/7及335/113

做疏率和密率”。接着，他在1951年4月2期23页《北京教师月报》上，发表的《旧珍宝，新光芒》中也有类似写法。后来，大量的报刊书也沿用了疏率这一名称。

其实，华罗庚在1962年6月出版的《从祖冲之的圆周率谈起》一书中，已经将这种叫法改正过来，并把《隋书》的原文列在书前，又在密率和约率的下面加上了重点号，以引起注意。此时，距离1951年已经11年了！

可以想像，一定有许多人看到过华罗庚1951年发表在《人民日报》上和后来转载的“疏率”；而且，他们在11年后不一定看到了《从祖冲之的圆周率谈起》中“约率”下面加的重点号，并悟出是在提醒人们注意。于是，在这11年中和1962年之后，一定有不计其数的人引用过“疏率”，并通过媒介传播开来，成为难以阻挡的“潮流”！

这可不是危言耸听——从“黎民百姓”到“大方之家”，都有在这“潮流”中“遭难”的。

除了2.6中提到“祖冲之还特地称何承天的22/7为疏率”之外，“疏率”一词屡见各种媒体，以下仅仅是其中一小部分。

（1）《数学上未解的难题》12页说，他（祖冲之）计算的π值介于疏率和密率之间，即：22/7>π>355/113。可见，这里把22/7称作疏率。

（2）《趣味数学365天》144页说，π的疏率22/7和密率355/113。

（3）两位学者合写的《数学发现的艺术》144页，也把22/7称为疏率。

（4）华北地区的一家出版社在1983年出版的《世界著名

科学家简介》5页也说，“祖冲之把圆周率的近似值22/7称为疏率”。显然也把“约率”称为“疏率”。

(5) 连多达288.6万字的《数学百科辞典》420页，也有“祖冲之（五世纪）得到22/7（疏率)”的记载。

(6) 由华北地区两家出版社、东南地区一家出版社三家联合出版的《数学辞海·第一卷》156页，也有“‘约率’（也称疏率)”的错误说法。

总之，直到现在，仍有不少媒体采用疏率这一错误的名称。

2.9 误解祖率“祸”起三上义夫

由2.7知道，梁宗巨认为，“祖率”这个名称来自于日本数学史家三上义夫，而且是专指“密率”(355/113)。

但是，在国内外不少文献中，却对祖率和密率存在不少误解，以下仅为几例。

第一例是，误把“圆周率”当成“祖率”。《数理化通俗演义·上》的78页说：“国际上曾提议将圆周率命名为祖率”。这里，以为“祖率”是指“圆周率”。此外，如果把“国际上”改正为“日本数学史家三上义夫”则更为准确。

第二例是，误把祖冲之的三项算π成就说成“祖率”。《中学数学教学参考》1997年（8-9合）期的文章中说：“祖冲之的圆周率是3.141 592 6<π<3.141 592 7。祖冲之提出约率为22/7；密率为355/113。祖冲之是世界上第一次把圆周率推算到小数第7位的人。为了纪念祖冲之的伟大功绩，人们将它称为‘祖率’。”显然，这里的“祖率”不是专指355/133，而是笼统地指祖冲之算π的这三项成就。《中学生学习报·初一、初

二版》1997年12月29日第4版，发表了《祖冲之与圆周率》一文，也有类似不准确的说法。

第三、四例是，误把密率的精度说成10位小数，把355/133与 $3.141\ 592\ 6<\pi<3.141\ 592\ 7$ 混为一谈。5.3的5中将要谈到的中译本坦普尔著的书291页，就是这样说的。

第五例是把 $3.141\ 592\ 6<\pi<3.141\ 592\ 7$ 当成“祖率”。一位国际知名的数学大师在《人生犹如数学》一文中这样写道：“中国古代的数学也很发达，比如祖冲之就很了不得，那时候就把圆周率算到了小数点后七位，比欧洲早了很多年，被外国人称为‘祖率’。”此文发表在2003年2月9日的《今晚报》上，《晚报文萃》2003年第4期42页也有转载。如果“祖率”是专指355/113，那么他的这种说法也不对。

总之，正如梁宗巨在《数学历史典故》中指出的那样：有的书说“日本数学家曾主张把圆周率定名为‘祖率’”，也有的说祖冲之的8位可靠数字“被称为‘祖率’”，或笼统地说“祖冲之的圆周率被命名为‘祖率’”，都是不对的。

《数学上未解的难题》一书中指出：“本来就相当荒芜的数学科普领域，充斥着许多东拼西凑的假冒伪劣产品，有的人在抄的方面都不负责任，其结果是错误百出，误导读者。”虽然上述作品不是“假冒伪劣产品”，而且这本书中的话也不是针对上述作品的，但是上述作品对祖率的误解的确存在。而这些误解的“祸根”，似乎就是那个日本人——三上义夫。

2.10 正数、朒数、盈数

《隋书》中还记载有祖冲之的另一成果：3.141 592 6<正

数<3.141 592 7。并且将3.141 592 6（小数后第7位取不足近似值）称为“朒数”，3.141 592 7（小数后第7位取过剩近似值）称为“盈数”，将准确值称为“正数”。显然，这里“朒”指不足，“盈”指过剩。

2.11 鲁道夫数

长期生活在莱顿（现属荷兰，当时属德国）的数学家鲁道夫（1540～1610），一生算π，最终在1610年除夕辞世之前，将π算到35位小数。他死后的墓碑上刻有他的这一π值（一说刻的是最后3位数）。为了纪念他的贡献，这个36位的π值在德国和欧洲其他一部分国家，被称为“鲁道夫数”——Ludolphsche Zahl或Ludolphian Number。

2.12 圆率（圜率、周率、圆周法）

在用汉字的中国和日本，原来没有圆周率的符号，而有“圆周率”、“周率”、“圆周法”（日本用“円”，相当于中国的“圆”）等各种名称。

此外，在近代，中国还有称圆周率为“圆率”、“圜率”的；可见当时对它的称呼很不统一。“圜”字在这里的音、义均同“圆”。“圜”的另一个含义是“环绕”，此时音读“环”。

2.13 数π（圆的周长和直径的比）

在英语里，圆周率没有一个简洁的名称：简单一点叫“数

π”（number π），详细一点叫“圆周长和直径的比”。

由以上圆周率的 30 多个“绰号”可见，其来源可大致分为以下四类：

（1）以发现（计算）者命名，如亚氏率。

（2）以近似程度命名，如约率。

（3）以多个名称合起来命名，如三率。

（4）以其他原因命名，如古率。

但在中国，除“圆周率”仍“在岗”外，其余“绰号”多已“下岗”。

必须指出，本书所说的“圆周率的名称”，并不是指准确的圆周率的名称，而是指圆周率某个特定近似值的名称。

这里顺便指出，正如梅荣照指出的那样，“率”的概念，中国古今的含义不尽相同。古代只有整数和分数（小数），没有无理数，因而把“比”的各项称为“率”，如“勾率”、“股率”等。当时的“圆周率”不是指的今天的 π 值，而是指周（率）22、径（率）7 等等。当然，古代“率”的本意是标准、准则、法度，并不限于“比”。刘徽曾给“率”下了准确的定义：“凡数相与者谓之率。”不过，在其他场合下，刘徽使用的“率”又是其他意思。

那么，“π”这个名称还会不会变呢？我们无法知晓，但不妨用威尔·罗杰斯（Will Rogers）的话来回答：“没有什么是永恒的。”这段话，《不论——科学的极限和极限的科学》91 页有记载。英国苏萨克斯大学天文学教授约翰·巴罗写的这本书，是李新洲等翻译的，由上海科学技术出版社在 2000 年出版。

◎第三章

圆周率的符号——π也会“变脸”

符号是人与人之间传达信息的运载工具。

——恩格斯

川剧中的“变脸”技惊四座，圆周率也是这样一个“百变金刚”。沙夫（William L. Schaaf）在《π的历史和本质》一书中也说：“在所有的数学符号中，最神秘、浪漫，被人误解最深，却最吸引人的符号，也许就是π了。”那就让我们来看一看神秘、浪漫、被人误解、最吸引人的π，是如何“变脸”的吧。

3.1 由两副“面具”组成的“脸谱”

考虑到π和δ分别是希腊文圆周（περιφερεια）和直径（διαμετρον）的第一个字母，所以英国数学家奥特雷德（1573或1574～1660）在1600年用π做周长、δ做直径的符号。他还在1647年出版（1631年初版）的《数学指南》一书中，用π/δ表

示圆周长和直径的比。这个 π/δ 是有史以来圆周率的第一个符号，这一符号成为其后人们用 π 表示圆周率的先导。虽然当时 π 在 π/δ 中表示的是圆的周长，δ 在 π/δ 中表示的是圆的直径，但 π 和 δ 并不是分开定义的，而是以 π/δ 这形式一起出现的。


图 3-1　艾萨克·巴罗

接着，以让贤于他的学生牛顿而流芳百世的英国数学家、剑桥大学教授艾萨克·巴罗（1630～1677）（图 3-1），和苏格兰数学家达维德·格雷戈里（1611～1708），都用 π 表示过圆的周长，从而使 π 成为一个单独的符号。艾萨克·巴罗采用这一符号的年代不详，因为记录这件事的文献在他生前并没有出版，而是在他死后近 200 年的 1860 年才出版。达维德·格雷戈里是发现著名的“格雷戈里级数”的詹姆斯·格雷戈里（1638～1675）的侄儿。达维德·格雷戈里采用这一符号的时间是 1697 年。此外，他还用过 π/ρ 这一符号，这里 ρ 表示半径，这就是说，他用过 π/ρ 这个符号来表示过圆周率的 2 倍。

另外，还有人用 c/r 来表示过圆周率的 2 倍，这里的 r 是圆的半径。

3.2 一副“面具”“不经意”走进舞台

1656（一说 1655）年，英国数学家沃利斯（1616～1703）在伦敦出版了《无穷算术》一书，书中用小方块“□”（即希

伯莱文 men）表示 4 /π 或它的近似值：4/3.141 49。

首先只用一个字母来表示圆周率的，是德国巴伐利亚的奥尔多夫大学（Univesrsity Aidorf）数学教授斯图姆（1635～1703）。他在 1689 年用 e 来表示圆周率。不过，e 在后来却用于表示自然对数的底，直到现在。

在求圆周率的值的过程中，人们常用直径为 1 的圆，就是前述 δ=1，这样 π/δ 就变成了 π。于是英国数学家、作家威廉·琼斯（1675～1749），首先就在 1706 年出版于伦敦的《新数学引论》一书 243、263 页上，使用 π 来表示圆周长和直径之比——圆周率。不过，琼斯这一开天辟地的符号并没有立即得到广泛流传和使用。

其后，瑞士数学家雅格布·伯努利即詹姆斯·伯努利（1654～1705）（图 3-2），曾用 C 表示过圆周率。1734～1739 年，被称为历史上“四大数学家”之一的瑞士巴塞尔数学、物理学家欧拉（1707～1783），曾用 c 或 p 表示圆周率，用 g 表示圆周率的一半。其间的 1736 年，他也用过琼斯的符号 π。由此可见，在这几年间，欧拉用的圆周率符号也没有固定。



图 3-2　雅格布·伯努利

接着，雅格布·伯努利的侄儿——他的大弟尼古拉第一（1662～1716）的儿子尼古拉·伯努利（1687～1759）即尼古拉第二，在1742年给欧拉的一封信中，也采用了 π 这个符号作圆周率。后来，经过德国数学家哥德巴赫（1690～1764）等人倡用，自 1748 年后，用 π 表示圆周率才逐渐被

人们接受、采纳、欢迎而被确定下来。到了 1794 年，法国数学家勒让德（1752～1833）在巴黎出版了《初等几何》一书的时候，欧洲的数学家几乎都开始用 π 表示圆周率了。其后便得到广泛流传使用，直到今天。

对琼斯用 π 表示圆周率的创举，美国数学史家卡约里（1859～1930）于 1928 年在他的《数学符号史》一书中，大加赞赏：“对他而言，这只是一件稀松平常的小事；但这件小事却使他名留青史。他若无其事地跨出这划时代的一步。没有宏篇大论的介绍，π 就从希腊字母中走进了数学历史的舞台。”

3.3 摇身一变无人能识

π 的上述“脸谱”大多是用人们熟悉的“颜料”——希腊文和拉丁文勾画，太“貌不惊人”了，于是有人别出心裁，要给它戴一副不同凡响、使人过目不忘的特殊“面具”。其中就有下面这位美国人。

为了强调 π 的重要性和它“天上地下，唯我独尊”的地位，美国数学家皮尔斯（1809～1880）曾在 1859 年采用“”表示圆周率 π，用“”表示自然对数的底 e。但“遗憾”的是，“阳春白雪，和者盖寡”——这些符号没有得到通行，就被淹没在历史的长河之中而“芳踪难觅”，以至鲜为人知了。

皮尔斯是哈佛大学的天文学、数学教授。在他之前，美国的数学并不受人关注，经过他和吉布斯（1839～1904）等人的努力，才使美国在数学领域的地位日益显得重要。

3.4 圆周率的符号在中国



图 3-3　李善兰

在中国，清代数学家李善兰（1811～1882）（图 3-3），在他 1859 年的《代微积拾级》一书中，用“周”表示圆周率。而中国清代 19 世纪后期的另外两位数学家邹立文和刘永锡，与美国传教士狄考文（19 世纪后期），于 1855 年合译的《形学备旨》［原作者是美国传教士罗密士（1811～1899）］10 卷，以及邹立文、生福维（19 世纪后期）于 1891 年合译的《代数备旨》13 卷（原作者狄考文）中，则采用“囗”来表示圆周率。直到 20 世纪初，我国数学著作由竖排改为横排，才比较统一地以 π 表示圆周率。例如，1932 年出版的《初级混合算学》一书中说：“圆周与直径之比，平常表示以 π。”

由上可见，古今中外 π 曾有 π/δ，π/ρ，c / r，□，e，g，c，p，℘，周，囗等多副“脸谱”。而 π，则是琼斯在 1706 年首先使用并至今仍“坚守岗位”的圆周率符号。

3.5 “不务正业”的 π

既然 π 是圆周率的符号，那它就应该“专心致志”，“坚守岗位”了。可是，历史上它却几次“不务正业”，“跳槽”“下海”。

大约在 17 世纪，法国数学家赫里岗（Pierre Herigone）用 π 来表示两个数的比率。例如，用“2π3”表示“2∶3”。而德国数学家卡斯特纳（1719～1800）则用 π 表示圆周，用“1∶P”表示直径和圆周的比率。不过，卡斯特纳后来却有点“朝三暮四”了：他时而说 $\cos u=\pi$，$\sin u=P$；时而又说 π 是某方程式中第“$n+1$”项的系数。当然，到了 1771 年，他也不再标新立异——而是从善如流地用 π 表示圆周率了。

到了 1799 年，意大利数学家鲁菲尼（1765～1822）则用 π 表示阶乘，他写道：“$\pi=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots m$”。但是在几年以后，π 的大写符号 Π 就取代了 π，成为阶乘的符号。1811 年，高斯、雅可比（1804～1851）、韦伯（1842～1913）都开始用 Π（n）表示 n 的阶乘了。后来，高斯又用 Π 表示“连乘”，这种方法一直沿用至今。

现在，π 还是一个“身兼数职”的“要员”——π（n）表示≤n 的素数的数目，例如 π（10）＝4；而高斯在 15 岁时发现的素数定理中也用到 π

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n/\log n}=1$$

此外，大多数麦金塔电脑的程式设计师，都是用 π 作原始程式的副档名，例如用到“mycode.π”。

对“不务正业”的 π，史坦因（Sherman K. Stein）在《数的力量》一书中，倒是“赞赏有加”：“拜托各位，请不要一提到 π，就想到圆周率。π 也是很多数值的代表符号。它代表所有不能被某素数平方整除的数，也是一个重要的统计学方程式中的符号。除此之外，π 还被用在许多地方。数学的有趣之处，就在于这些看似无关，却又相关的地方。”

◎第四章

圆周率的性质——揭开π的“庐山真面目”

每一种新的进步，都必然表现为对某一种神圣事物的亵渎。

——马克思

π是何方“神圣”——它的性质怎样？这是一个人们研究了几千年的问题。

关于圆周率的性质及人们对它进行研究的历史，不同的数学史家研究方法不同。

例如，德国数学史家舍普勒（Herman C.Schepler），在1950年德国《数学杂志》刊载的《π的年表》（The Chronology of Pi）（图4-1）中，按年代先后，集中了各家研究的成果，列出了有关π的从公元前3000年至公元1949年期间的123个条目。这一文献由德国驻华大使馆的毛雷尔女士在1998年2月4日提供给本书作者。

又例如，美国数学史家达维德·史密斯（1860～1944）将

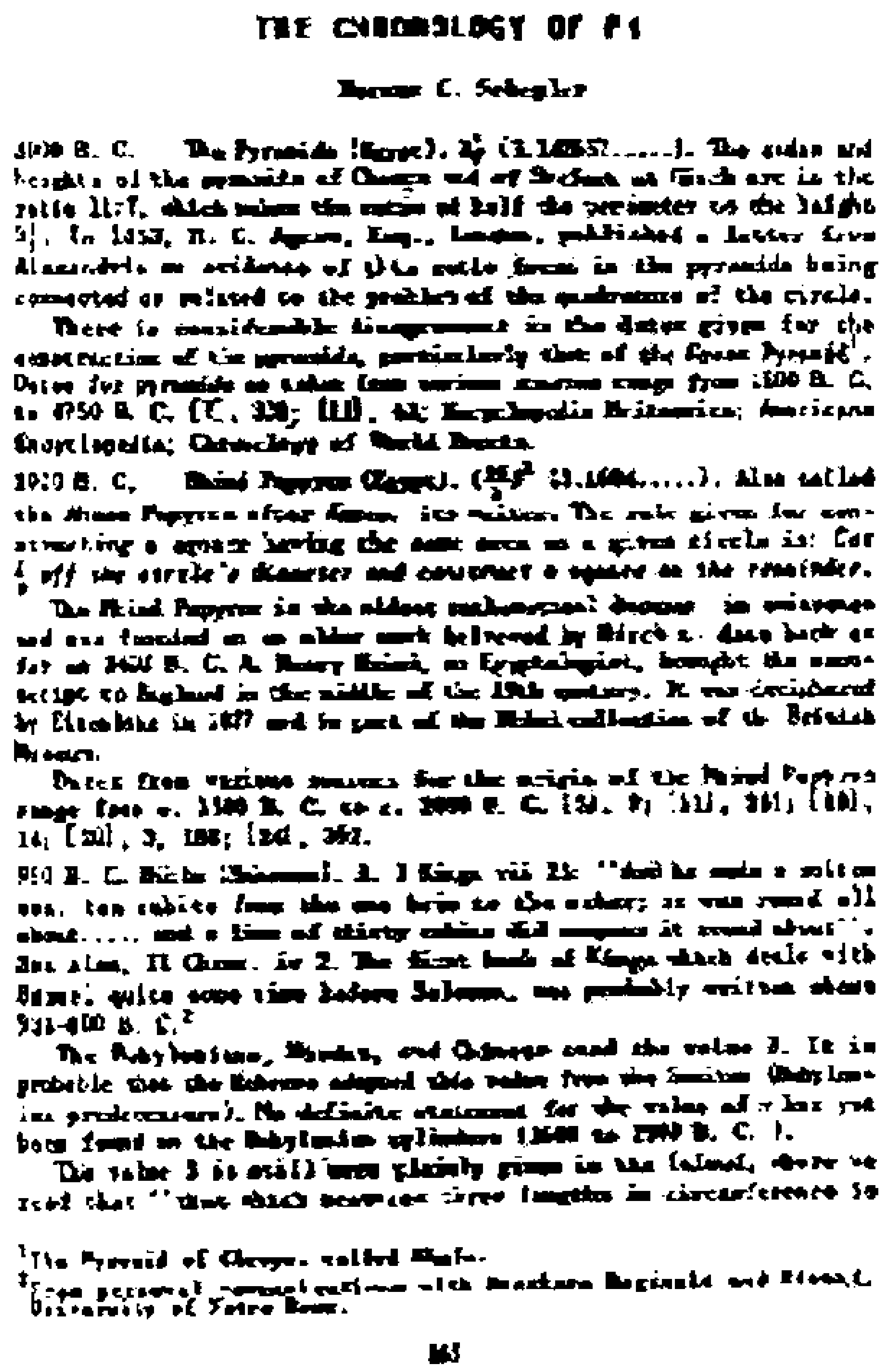


图 4-1 《π 的年表》第 1 页影印件

“圆周率 π 之历史及其超绝性（即超越性——引者）”分为三个时代。

（1）自古时至 17 世纪中期，此时代大都是求一个正方形等于一个已知的圆等努力，或用目前的初等教科书中所述的那种纯粹几何方法，求 π 的近似值。

（2）自发明微积分起至兰伯特（1728～1777）证明 π 是无理数为止，即约 17 世纪 60 年代至 18 世纪 60 年代的 100 年，这一时代的特色，是解析方法替代了古代的几何法；并认为其中著名的研究者为牛顿、莱布尼茨（1646～1716）、詹姆斯·伯努利和约翰·伯努利（1667～1748）两兄弟、欧拉等。这个时

代中求π的方法，不再用古代的“竭尽法”，而用无限级数及乘积求π的值等。

（3）从18世纪中期至20世纪，其特色是探求π的性质，即是否为有理数、代数数、超越数等等。

本书采用另一种研究方法，即分别研究π的定义、名称、符号、性质和人类辞别洪荒以来计算π的数值及其计算方法等等，最后列出收集到的157种π值，以期让读者从各个角度对人类对π的研究，有更系统详尽的了解。

下面要说的π的性质，指的π是一个什么样的数。例如，它是整数还是分数？是常数还是变量？是有理数还是无理数？等等。人们对π由浅入深的认识大致经历了下述“人文初始之后”、“无理数”、“超越数”、“寻找新规律”这四个时期。

4.1 人文初始之后对π的认识

混沌初开，人文伊始——人类告别了茹毛饮血的时代。肯定在这之后不久，人们就在生活和生产实践中认识到π是常数。例如，古希腊数学家欧几里得（约公元前335至330～前275），在《几何原本》中就提到π是常数。中国公元前的古书《墨子》中也有“小圆之圆与大圆之圆同”的记载。这里的“圆”，古代也写作“圜”。大约公元前2世纪的《周髀算经》中“径一而周三”的记载，也认为π是一个常数。

虽然古人一直笃信π是一个常数，而且知道它的近似值，但是其准确值却无人知晓。多数国家的古人最早都认为π是一个整数3。在中国，除上述《周髀算经》等书籍之外，大约在1世纪的《九章算术》中也是这样认为的。古希腊、巴比伦、

埃及、印度、日本的史料中也是这样记载的。例如，希伯来人的《两个编年史》中就有 $\pi=3$ 的记载。

这种 $\pi=3$ 的认识，大致持续到中国刘徽之前，即约 3 世纪。不过，古希腊是个例外，因为阿基米德在公元前 200 多年就科学地求得实用而较准确的 π 值 3.14 了。

4.2 无理数时期对 π 的认识

中国的无理数时期，可认为大致从刘徽即约 3 世纪开始。他不但认识到 $\sqrt{2}$，$\sqrt{50}$ 等开方不尽，称之为“不可开”；还认识到 π 应是“至然之数”。当然，当时“无理数”的概念尚未形成，他也不知道 π 是无理数。不但如此，中国古代数学中一直没有“无理数”这一概念，所以它是“泊来品”。在古巴比伦和埃及，也没有这一概念。

无理数最早是由古希腊毕达哥拉斯（约公元前 572 至 580～前 497 至 500）（图 4-2）学派中的希帕索斯（约公元前 5 世纪）发现的。他发现边长为 1 的正方形的对角线长（$\sqrt{2}$）不是有理数，即不能用任何两个整数的比表示，是无限不循环小数。当时叫“没有比”或“不能表达”，后来叫“不可通约量”。但是，由于毕达哥拉斯学派笃信“万物皆依赖于整数”的神学观点和哲学理念，怕这一发现和泄

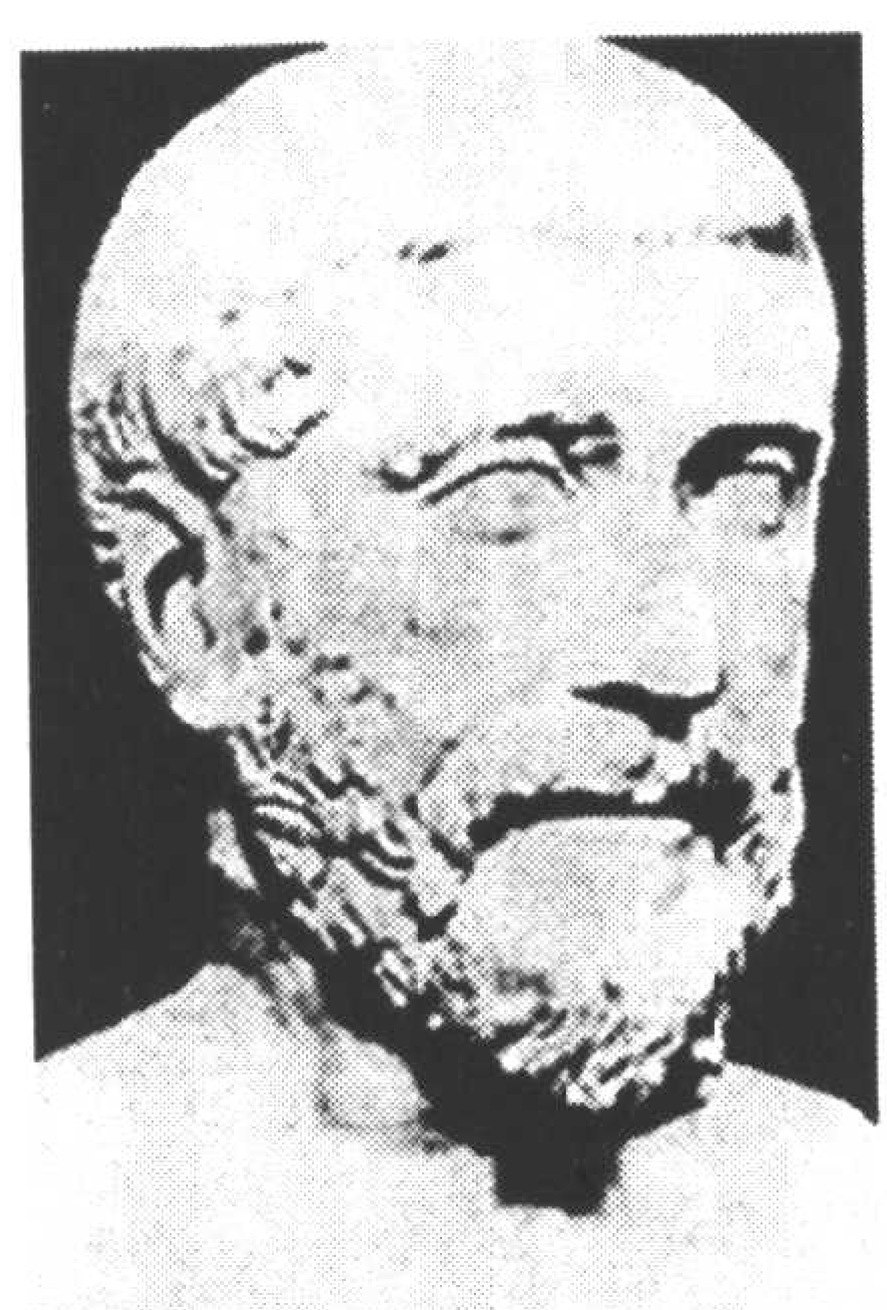


图 4-2　毕达哥拉斯

密对其造成毁灭性的打击，于是将希帕索斯追杀后抛进大海，以惩罚他对上述发现的泄密。另一说是，将他逐出学派，并立了块墓碑，好像他已经死了。由此可见，虽然“无理数”中“无理”这一沿用至今的“进口货”名称欠妥，但将“无理”二字用在维护神权、害怕真理的这个学派上却正好合适。

但是，发现无理数的秘密最终还是广为流传开来。古希腊科学家、哲学家亚里士多德（公元前384至 380～前 322）（图 4-3）揭示了$\sqrt{2}$的无理性。他的证法实际上是当今教科书中采用的反证法。据古希腊哲学家、数学家柏拉图（公元前 427～前 348 或 347）说，他的老师、古希腊数学家泰奥多勒斯（约公元前 5 世纪末），还证明了 3～17（除 4，9，16 外）各整数的算术平方根的无理性，并提出了无理数的基本思想。



图 4-3　亚里士多德

无理数的发现，推翻了早期希腊人的以下信念：给定任何两条线段，必定能找到也许是很短的第三条线段，使得给定的两条线段都包含这条线段的整数倍。这就引发了“第一次数学危机”；并导致古希腊数学从重视“数”到重视“形”（几何）的转变——以致后来柏拉图学园门口有著名的“不懂几何者免进”的牌子。

对待上述“危机”有两种态度。

一种是绕道走，其思路就是由“数”转变到“形”。古希腊数学家欧多克索斯（约公元前408至400～前355至347）、欧几里得都是这样——想靠几何方法避开使人“难堪”的无理数。当然，这也与当时古希腊人崇尚几何的风气——“几何即数学”的观点有关。

另一种态度是正视“危机”。有趣的是，上述欧多克索斯、欧几里得也是正视这一“危机”的人——他们定义了两个量的比和两个比的相等关系，把可公度和不可公度都包括在内，但仍避而不用数来表示这个比。可见这二人是从几何上试图解决“危机”，从代数上回避“危机”的。他们认识到圆面积与半径的平方成正比，圆周长与直径之比为常数；但对比例系数π却不屑一顾或不作叙述，是代数上回避矛盾的实证。

此外，柏拉图、毕达哥拉斯的学生阿契塔斯（公元前428～前347或365）也给出了类似的定义。这样，由于无理数的发现而引发的“第一次数学危机”便大致消除了。接下去的故事是，例如阿基米德等人开始使用无理数。

约1300年，中国元代数学家赵友钦（13～14世纪），用割圆术求π时指出：“若节节求之，虽至千万次，其数终不穷”，说明他对π的性质的认识，实际上已接近无理数的边缘了。

在14世纪，英国数学家布拉德瓦丁（1300～1349）最早采用“无理”一词后，至十六七世纪，欧洲人逐渐将无理数纳入运算。荷兰科学家斯蒂文（1548～1620）、两位英国数学家沃利斯和哈里奥特（1560～1621）、法国数学家笛卡儿（1596～1650）等都承认无理数。但另一些数学家，如德国的斯蒂费尔（1486或1487～1567）对它的认识则是矛盾的：一

方面，运用它能证明有理数所不能证明的某些结果，因此“不能不承认它们的确是数”；另一方面，“没有一个无理数能被准确掌握”，因而它“也不是一个真正的数”。法国科学家帕斯卡(1623～1662)、艾萨克·巴罗、牛顿还认为，$\sqrt{3}$等只能理解为几何上的量。

无理数的本质特征是“无限不循环”，由于在各种形式的π的级数展开式中，始终没有找到一个递减的几何级数，也一直没有找到π的“莱布尼茨级数和”（见5.4的1）的公式，对π值进行的“马拉松”式的计算竞赛中，也一直没有发现任何循环迹象。于是，认为π可能是有理数的希望逐渐消失了。事实上，早在约15～16世纪，印度数学家尼拉堪塔(Nilakantha)就确信π是无理数了。

苏格兰数学家詹姆斯·格雷戈里是第一位证明π是无理数的人。不过。他巧妙的证明不很严密，因而不太令人满意。

此外，法国数学家德·拉尼（1660～1734）也在17世纪末对π的无理性做出过推断，这一推断在半个多世纪以后，由德国数学家兰伯特（1728～1777）证明。

在兰伯特证明π是无理数之前，欧拉给出了用无限连分数计算平方根的一般方法，并将自然对数的底展开成三种无限连分数，即

$$e = [2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1\cdots]$$
$$=2+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{4}{4}\cdots=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\cdots$$

并初步证明了e和e^2也是无理数，他还求得

$$(e+1)\ /\ (e-1)\ =2+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\cdots$$

和(1) $(e-1)\ /2=\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\cdots$

1761（或 1767、1768）年，兰伯特向柏林科学院提交论文，初步证明 π 也是无理数。其证明如下。他用欧拉的方法，并从(1)和英国数学家布龙克尔（1620～1684）在 1658 年发现的

$$4/\pi=1+\frac{1^2}{2}+\frac{3^2}{2}+\frac{5^2}{2}+\cdots$$

入手，先得出后人以他姓氏命名的两个连分式

$$(e^x-1)\ /\ (e^x+1)\ =\frac{1}{2/x}+\frac{1}{6/x}+\frac{1}{10/x}+\cdots,$$

$$\tan x=\frac{1}{1/x}-\frac{1}{3/x}-\frac{1}{5/x}-\cdots$$

他研究这两个式子的性质之后，得到以下两个定理：

定理 1 如果 x 是 0 以外的有理数，则 $\tan x$ 必为无理数；反之，如果 $\tan x$ 是 0 以外的有理数，则 x 必为无理数。

定理 2 如果 x 是 0 以外的有理数，则 e^x 必为无理数；反之，如果 e^x 为 1 以外的有理数，则 x 必为无理数。

最后，他设 $x=\pi/4$，则 $\tan x=1$；因为 1 是有理数，所以由定理 1 知道，$\pi/4$ 必为无理数，因而 π 也必为无理数。

兰伯特出生在原属瑞士、今属法国阿尔萨斯的慕尔豪乌森，曾移居德国奥格斯堡，最后居柏林。他以从不趋炎附势等行为而名扬四海。据说他与欧拉、法国拉格朗日（1736～1813）等数学家在柏林科学院共事时，普鲁士的菲特烈大帝（1712～1786）曾盘问他到底有何专长，而他觉得不屑于回答，许久才从牙缝里挤出一个“都”字。

不过，兰伯特的上述证明，有人认为是不严格的。

1794 年，法国数学家勒让德（1752～1833）在巴黎出版了《初等几何》一书。此书对兰伯特的不严格证明予以补证，从而给出了 π 和 π^2 是无理数的严格证明。此外，勒让德还在

书中写道："很有可能，数 π 不能包含在代数的无理数中，亦即它不能是其系数全部为有理数的有限项的代数方程的根"。他的这一猜测表明他已意识到 π 为超越数；同时，这一猜测最终导致无理数的分类。

至此，π 是无理数的认识即告完成。当然，也可认为无理数的理论基础已大致完成。

π 是无理数这一认识的完成，从理论上彻底解决了求 π 精确值的问题。理论上讲，人们尽管可以求得它准确到任意有限位小数的值，但实际上永远不可能用小数表示它的准确值——它的准确值用小数表示必须有无限多位。

但是，无理数的严格理论至此尚未给出。例如，在相当长的一段时间里，无理数被认为是一个以有理数为项的无穷序列的极限。

18 世纪后半叶，拉格朗日证明了任何无限连分数都是无理数，它的逆定理也成立。1837 年，英国物理学、天文学、数学家哈密顿（1805～1865）在《代数作为纯时间的科学》中，给出了无理数的一个处理方法。1869 年法国数学家梅雷（1835～1911）在有理数的基础上，给出了无理数的一个定义。但无理数的严格定义却主要是由下述德、法数学家完成的。他们是 6 位德国数学家——魏尔斯特拉斯（1815～1897）、海涅（1821～1881）、戴德金（1831～1916）、巴赫曼（1837～1920）、斯托尔兹（1842～1905）、康托尔（1845～1918）和法国数学家——波莱尔（1871～1956）。

不过，至今诸如欧拉常数 γ 是不是无理数这类看似简单的问题，仍然没有解决——无理数的研究远远没有大功告成。

德国数学家克罗内克（1823～1891）有一句名言说，"上

帝创造了整数，其他一切都是人造的”，因而都是可疑的。他否定无理数的存在，甚至说圆周率 π 也不存在，因为从整数无法造出 π 来。在今天我们看来“顺理成章”的无理数，直到 19 世纪还有像德国克莱因（1849～1925）这样的著名数学家拒不承认，由此可见，从希帕索斯被追杀开始，人们对它的认识历经 2000 多年，的确走过了漫漫长路！

4.3 超越数时期对 π 的认识

前面说到，勒让德在证明 π^2 是无理数的同时，提出 π 可能不是有理系数方程的根的猜测，这是 π 也是超越数的最早猜测。

1873 年，因为腿脚不好，一生总是拄着拐杖的法国数学家埃尔米特（1822～1901）（图 4-4），证明了自然对数的底 e 是超越数。他的证明在数学界引起了巨大的反响，也炒热了 π 是否也是超越数的话题。有人曾要他继续研究这个问题，但他没敢尝试，就婉言拒绝了。他说：“我可不想自找麻烦，去证明 π 是否为超越数。如果有人要去尝试，我衷心祝愿他们成功。但先要声明一下，他们一定会吃尽苦头的。”



图 4-4　埃尔米特

您还甭说，真有想“吃尽苦头的”人——德国数学家林德曼（1852～1939），而且还渡

过“苦海”，取得了成功。

1882年，林德曼在连续函数的意义下，借助于欧拉著名的公式 $e^{i\pi}+1=0$，终于证明了π是超越数。林德曼的方法与9年前埃尔米特的方法好似一对双胞胎。埃尔米特知道以后，非常高兴。此时，离勒让德在1794年的猜想已经92年!

林德曼的同胞克罗内克（1823～1891）曾在1882年写信给林德曼说：“你把π研究得非常透彻，但那又怎样？既然无理数不存在，你又何必去钻研这种问题?”看来，林德曼不但有“偏向虎山行”的胆量，而且有“三千一瓢”的专一，是一个“不到黄河心不死”的人——科学就“怕”这种人。

3年以后的1885年，林德曼的证明被魏尔斯特拉斯在 Berliner Sitzungsberichte 中化简；1893年又被德国数学家希尔伯特（1862～1943）化得更简；最后，被德国数学家果尔丹(Gordan, Paul Albert, 1837～1912)（在 *Mathematische Annalen*, 1893, vol.43上）和美国数学家霍尔维兹（Leonid Hurwicz）化为初等证明。

至此，π是超越数的认识阶段大致完毕。

4.4 寻找新规律时期对π的认识

除了认识到π是无理数、超越数外，π的数值排列还有没有什么规律呢？它与其他数又有什么联系呢？…… 于是，对π的性质的探索进入寻找新规律时期。

在电子计算机发明之后，在理论上已可将π算到任意多位准确值了。计算出越来越多位数的π值的原因之一就是为了取得涉及π的“正态性”的统计信息。



图 4-5　波莱尔

一个实数在它的小数展开式中，所有 10 种（指 0，1，2，…，9）数字以相等的频率出现时，被称为“简单正态”的；如果所有同样长的数字块以相等的频率出现时，被称为“正态的”。“正态”又称“正则”或“正规”。“简单正态”又称“单纯正态”或“简单正规”。分别具备以上性质的数被称为“正态数”和“简单正态数”。这些概念是由法国数学家波莱尔（图 4-5）提出的。“正态的”也可以解释成任意长为 n 的一串数字出现的平均频率为 10^{-n}，例如，当 $n=2$ 即两位数时，任意一个两位数出现的频率都是 10^{-2}即 1%。

那么，π 是不是简单正态数或正态数呢？

1. π 是简单正态数吗

1873 年，英国数学家威廉·山克斯算出 707 位小数的 π 值。1946 年，英国曼彻斯特的数学家弗格森（D.F.Ferguson）宣布这个 π 值有误。为什么这几十年内没有人去怀疑威廉·山克斯的 π 值，而恰好这位弗格森要去核算呢？这是由于弗格森笃信 π 是简单正态数，但他经过统计发现，上述 π 值的前 608 位 π 的小数值中各数字出现的频率相差很大（表 4-1）特别是其中“7”出现的频率 44 次太少——远少于平均值 60.8 次。这种情况，要么说明 π 不是简单正态数，上述 π 值正确；要么说明 π 是简单正态数，上述 π 值有误。经过一年认真核算，终于发现山克斯的 π 值从小数点后 528 位起就是错的，这一位的

"4"，已被他误为"5"。

表 4-1　山克斯算出的前 608 位 π 值中各数字的频率

π值中的数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
各数字的频率	60	62	67	68	64	56	62	44	58	67

说明："各数字的频率"指相应数字出现的次数，其和为 608

不过，最早发现山克斯的 π 值中"7"出现次数太少的，很可能不是弗格森。因为"在概率论方面非常有名的 D. 莫尔干发现山克斯的结果中'7'非常少见。他说'出现这种情况的概率是 1/45，也就是说算错的可能性很大'。"这里指的是，他在研究了 π 的前 600 个数后，发现 7 出现的次数为 50 次，比期望"应该"出现的 60 次少。这里的 D. 莫尔干就是英国数学家德·摩尔根（1806～1871）。

1973 年，法国女数学家吉劳德（1923～　）和芳旦娜小姐一起，又对 π 的前 100 万位值作了统计（表 4-2），发现最大的相对频率偏差发生在数字"6"上，但也仅为 0.452%，即不到 1/200，这就更使人们有理由相信，π 是简单正态数。

表 4-2　100 万位 π 值中各数出现的（频率）偏差（$=10^5-$实际出现的次数）

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
偏差	−41	−242	+26	+229	+230	+359	−452	−200	−15	+106

说明：相对频率偏差＝（频率）偏差/10^5

此外，表 4-3 给出 π 小数点后 2000 亿位中各数出现的次数。从表 4-3 中可以看出，各数出现的频率偏差很小：其中偏差最大的数"8"的相对频率偏差也不到 0.0015%。

表 4-3　2000 亿位 π 小数值中各数出现的次数

数字	该数字出现的次数	数字	该数字出现的次数
0	20 000 030 841	5	19 999 917 053
1	19 999 914 711	6	19 999 881 515
2	20 000 136 978	7	19 999 967 594
3	20 000 069 393	8	20 000 291 044
4	19 999 921 691	9	19 999 869 180

有人将 π 的前 126 位值作成图 4-6，并在数 4 与 5 之间画一条线，则可看到该线上下的点大致一样多。这说明 0～4 这 5 个数和 5～9 这 5 个数出现的概率大致相同。他还考察了 π 的前 1000 位小数，发现 0～9 中任意两个数所组成的两位数都至少出现过一次。

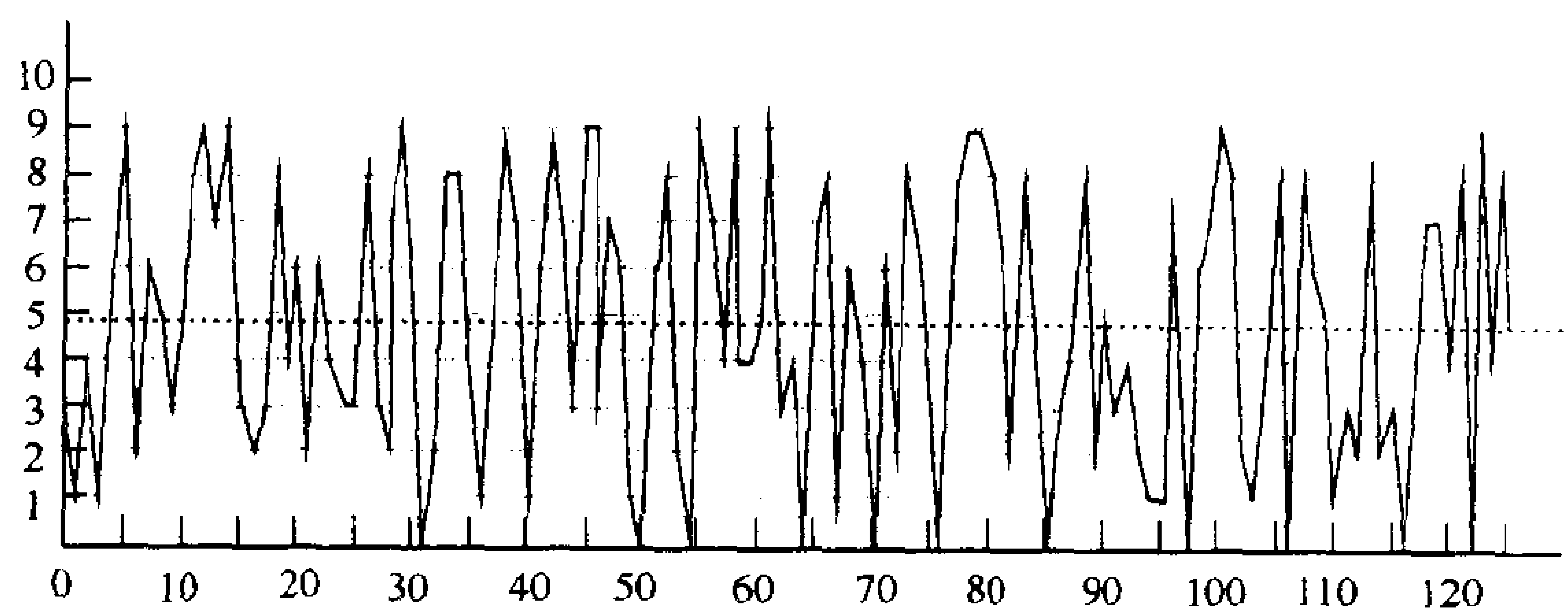


图 4-6　π 的前 126 位值域分布

π 是不是简单正态数？这是一个至今尚未解决的难题。要解决它，显然不能仅仅依靠统计，还应从理论上有所突破。不过，此时我们不应该忘记爱因斯坦那句名言：“理论的建立是没有逻辑途径的。”

2.π是正态数吗

荷兰数学家、近代直觉主义的创立者布劳威尔（1881～1966），为了逻辑上和哲学上的目的，提出了一个困难的问题："在π的十进位展开式中，是否有1000个相继的数字全为0?"如果π是正态数，那么1000个0的数字块绝不只出现一次而是无限多次，而且其出现的平均频率为$1/10^{1000}$。哇！这是一个"超级天文数字"的倒数。回答布劳威尔的问题决非探囊取物，而回答π是不是正态数的问题恐怕更是"难于上青天"。至今，这些问题仍然是悬案。要解决它们，显然不能只依靠电子计算机。

这正如美国数学史家伊夫斯（Howard Eves）在他1971年出版的《重访数学界》一书中所说："这当然不是电脑能解决的问题。……目前很多人认为电脑无所不能。这类问题的存在，或许能点醒他们。"不过，数学家们笃信π，$\sqrt{2}$，欧拉常数γ，e等，都是正态数，还是用电子计算机把它们算出许多位。例如，美国哥伦比亚大学的达特卡（J. Dutka），在1971年花去47.5小时，算出$\sqrt{2}$的1 000 082位值，它被打印在200页的纸上。又如，法国女数学家比尔（W.A.Beyer）和华特曼（M.S.Waterman），在1974年把γ算到小数点后7000多位。而1996年日本人金田康正则把e算到小数点后515 396位。

这种研究的价值之一在于，正态性能够成为科学计算的伪随机数发生器的基础。虽然这种研究至今仍长路漫漫，但人们相信，π的研究会揭示出解决正规性问题的新方法。

3.π的奇趣数字中有奥秘吗

加拿大当代数学家彼德·波尔文（Peter B.Borwein）曾在

1996年说过：“圆周率自有它的魅力，让人忍不住要多看它几眼。它的数字排列完全不按章法，没有任何规律。从数学的观点看来，这正意味它包含了所有的规律。”

事实果真如此吗？

虽然至今人们还没有解决 π 的正态性方面的问题，但却从计算出的多位 π 值中发现了一些有趣的、甚至可能包含奥秘的现象。例如，从 π 的小数点后第 710 100 位起连续出现 7 个“3”即“3 333 333”，第3 204 765 位又连续出现7个“3”；小数点后的前 1000 万位中，有 87 处同一数字连续出现 6 次的——例如从第 762 位小数起，就连续出现 999 999。而从24 658 601位起，连续出现了 9 个“7”，连续出现 9 个“6”或9个“8”的情况也有；但连续出现 9 个相同数字的概率很小。同一数字连续出现 9 次的概率仅为 $1/10^8$。此外，从第995 998 位起，出现23 456 789 连升的序列；从第2 747 956 位起，又出现 876 543 210 连降的序列；而从 26 160 634 位起，10 个数字恰好包含 0 到 9，为 2109 876 543。

据计算，按 0 到 9 这个顺序进行整齐排列的概率很小，仅为 $1/10^9$，这就至少要查找 10 亿位 π 值——实际首次出现在17 387 594 880——170 多亿位小数处。

前6 位 π 值 314 159 是个素数；有人统计过，在 π 的前1000 万位数中，这个数至少出现过 6 次。π 的前 1.335 54 亿数位中，π 的前 7 位值 3 141 592 仅出现过 4 次；π 的前 8 位数字 31 415 926 则仅出现过 1 次。人们还发现，从 π 的小数点后第 52 683 位起，出现了 14 142 135 这个数，而它正好是$\sqrt{2}$的前 8 位数字。此外，前述自然对数的底的前 11 位数字则出现在45 111 908 393位小数起的位置。

像这种 π 中有素数，π 中有 π，π 中有$\sqrt{2}$，π 中有 e 的趣味现象，也是人们乐此不疲的话题。那么，这其中有奥秘吗？

4．等待揭秘的 π

法国数学家刘维尔（1809～1882）在 19 世纪曾指出，对无理数 β，如果对任意一个 n，都存在整数 p 和 q，使下面的不等式成立：$0<|\beta-(p/q)|<1/q^n$，那么，这些 β 都是超越的。这类 β 型的无理数就称为刘维尔数。

1953 年，英国数学家马赫勒尔（1903～　）证明了 π 不是刘维尔数，即 π 不是刘维尔数类型的超越数，而是另一种类型的超越数。

1977 年秋，四色定理的证明者之一、美国伊利诺伊大学的哈肯（Wolfgan Haken）提出猜想：π 的前 n 位数不可能成为完全平方数。他估计这一猜想不成立的概率仅仅是 10^{-9}。但他却不能证明猜想是否成立。那么，真的前 n 位 π 值构成的自然数不可能是一个完全平方数吗？这等待人们揭密。

表 4-4 给出了另一些有趣的数字序列在小数点后出现的位置，其中最后一个数字序列为自然对数的底 e 的前 11 位数字。这种联系还有吗？如有，有规律吗？

表 4-4　有趣的数字序列

数字序列	该序列出现的位置
01 234 567 891	26 852 899 245
	41 952 536 161
	99 972 955 571
	102 081 851 717
	171 257 652 369
01 234 567 890	53 217 681 704
	148 425 641 592

续表

数字序列	该序列出现的位置
432 109 876 543	149 589 314 822
543 210 987 654	197 954 994 289
98 765 432 109	123 040 860 473
	133 601 569 485
	150 339 161 883
	183 859 550 237
09 876 543 210	42 321 758 803
	57 402 068 394
	83 358 197 954
	89 634 825 550
10 987 654 321	137 803 268 208
	152 752 201 245
27 182 818 284	45 111 908 393

π与 e 的数字联系还不仅如此。有人在发现π与 e 十进制小数的第13位9，第17位2，第18位3，第21位6，第34位2…都相同之后猜测，π与 e 的十进制数字平均每10位会有1次雷同，这一猜测至今没有被证实或被否定。

英国数学家、哲学家罗素（1872～1970）说过一句简单而富于哲理的话：“不知经过了多少年，人类才发现一对锦鸡与两天同是数字2的例子。”仿此，我们也说：不知要过多少年，人类才会知道当年神秘的π，原来是这个样子！

日本高中课本说：π是“文明的标志”。其实π也是美的标志。正如贝多芬（1770～1827）所说：“为了更高的美，没有一个规律是不可以打破的”。为了更高的美，我们可以打破任何“戒律清规”，自行其是。一位数学家也说：“你可以搞你的一套π和 e。”这说明π和 e 的理论和性质可以是形形色色的。

我们在开掘π这一深深的丰富的数学宝藏之时，不必为别人说你搞“数字游戏”而惴惴不安，因为正如法国大文豪巴尔扎克（1799～1850）所说：“没有数字，我们整个文明大厦将坍塌成碎片。”

于是，普利斯顿（Richard Preston）于1992年在《纽约客》(The New Yorker）上发表的《圆周率的山》（The Mountains of Pi）中，不无调侃地说：“圆周率有规律吗？这个问题和‘死后有来生吗?’一样，你死后就知道了。”

◎第五章

从 1 位到 12 411 亿位——历史上的π值及计算方法

计算 π 值，大概是在古代数学的范畴中，唯一仍能让现代数学家苦心钻研的问题。

——伯格伦、乔纳森·波尔文、彼德·波尔文

π 值是多少和它是怎么算出来的？这是许多人感兴趣的问题；对此，国内外论著颇丰且高招迭出。例如，在中国，茅以升著有《π 值是怎么算出来的》，北京师范大学王申怀教授和其他一些作者，也分别有《π 的数值是怎么计算出来的》等论著。但归纳起来主要有 4 种：割圆术、分析法、“沙-波法”、椭圆积分法。本章摭百家之智作管窥蠡测。

5.1 混沌初开之后——人类的第一个π值

这里所说的混沌初开后的第一个 π 值，是指 3——也许人文初始之后不久，人类就由原始的测量得到这个近似 π 值了。

3 与 π 真值的绝对误差为 0.1415 …，相对误差为

4.507…%；本书中的这两种误差都取绝对值。可能当代人会无情地嘲笑古人的无能——“怎么这样大的误差!”其实，这种嘲笑大可不必，因为后人曾不止一次不如古人。例如，在5.2的2.（1）中，你会看到，在18世纪还有一位法国警官得到相对误差达27.323…%的 $\pi=4$ 呢！考虑到古代科技水平远逊于当代，笃信有“世上今人胜古人”的客观规律，就不会去无情嘲笑了。

1. 远古人用 $\pi=3$

3被古代世界许多国家普遍采用。

由2.1可知，中国一些古书中谈到“3”这一古率。比如《九章算术》第一章《方田》31题：“今有圆田，周三十步，径十步。问田为几何?”显然也认为 $\pi=3$。又如南宋数学家秦九韶的《数书九章》中也有 $\pi=3$。

基督教经典《圣经》中的《旧约圣经》即《旧约全书》里《列王纪》第7章23段等章节记载，所罗门王建造宫殿，“又铸了一个铜海”（盛水的圆柱形大容器），“高五肘、径十肘、围三十肘”。这里“径”、“围”分别指圆的直径和周长；“肘”即“腕尺”，一肘约0.5米长。显然,《圣经》在这里认为 $\pi=3$。这段文字描述的事发生在公元前950年前后。这一史实也记载于希伯来人的《两个编年史》第4章第2段中，这本书约写于公元前932～前800年。而希伯来人至少在公元前500年时还在用 $\pi=3$。

约公元前4000年，西亚底格里斯河和幼发拉底河之间新月形的美索不达美亚平原上，居住着以苏美尔人和阿卡德人为主的一些民族。到汉谟拉比（？～约公元前1750）统治时期

(约公元前1792～前1750)，巴比伦人统一了上述两河流域，人们才习惯地称此地为“巴比伦”，这大体相当于现代的伊拉克。从当地出土的大多数泥版书表明，在不晚于公元前2500年时，巴比伦人已取 $\pi=3$ 了——当时他们实际上用 $S=3R^2$ 来算圆面积。

泥版书也称泥板书，是古代的一种文字记录。以楔形文字刻于黏土板上，经过干燥（一说烧结）后呈硬书版。这种书写方式主要流行在西亚和克里特岛上。年代大致在公元前2000年左右，和公元前600～前300年这两个时期。19世纪初，考古学家经过系统的发掘，发现了约50万块这种大到课本、小到香烟盒的泥板书；经鉴定，其中有300块上面的内容是纯数学的。

古印度、日本人也使用过 $\pi=3$。

在古希腊，人们用3作为圆周率的值，大约持续到阿基米德之前。此前一些人，例如欧多克索斯在约公元前4世纪，用穷竭法证明了两圆面积之比以及两球体积之比，分别为其半径之比的平方和立方；但他们对其比例系数即 π 是多少，却予以回避或不屑一顾。这是数学史上独一无二的、发生在古希腊的有趣现象。

对于3（和22/7）这样的值，迈蒙拉比（1135～1204）在12世纪评论说：“我们无法求出这个圆周率，但可以估计出它的近似值。科学家常用约值22/7。既然他们无法求得正确值，就干脆用一个整数3代替，得到‘圆周是直径的3倍’这一公式，并把它作为测量的依据。”

3这个 π 值虽然粗略，然而在古代低下生产力水平的粗略计算中，一般还是可以满足需要的，所以也被使用了许多年。

例如，中国直至东汉（25～220），政府还明文规定以圆周率3作计算的标准数值。

2. 不只是远古人用π=3

然而，“学者锺古，3其谬矣。”来自推测、经验或很不准确测量的π值3，显然不能满足更高的要求。然而，不是每个人都能这样正确认识的，以下举出几个实例。

大约生活在9世纪的印度数学家马哈维拉即大雄或摩诃毗罗，在当时还给出椭圆周长 $L=2(2a+b)$ 和面积 $S=b(2a+b)$ 这两个粗糙的近似公式。在公式中，a 和 b 分别代表长短半轴的长。我们看到，即使让其中 $a=b$，即椭圆变成圆的时候，公式变为 $L=6a$ 和 $S=3a^2$，也只相当于 $\pi=3$；如果 $a\neq b$，那么对应的π值比3的误差还大。

中国《宋书·卷二十三·天文志》中，有“文帝元嘉十三年，诏太史令钱乐之，……又作小浑仪，径二尺二寸，周六尺六寸”的记载（寸，尺及下文的丈为长度单位，1丈=10尺=100寸，1米=3尺）。《隋书·卷十九·天文志》中，也有“前赵孔挺，造浑天仪，双规内径八尺，周二丈四尺”的记载。可见这π=3一直用到南朝宋和隋代即约5～7世纪！到了元代，王恂（1235～1281）13岁学算，精通《九章算术》，曾“以算术冠一时”，后受命和郭守敬（1231～1316）、杨恭懿（1225～1294）等编制《授时历》。但是，在他们用沈括（1031～1095）的“会圆术”计算的时候，却仍然用π=3，因而导致较大的误差，并最终使这个历法在使用不久之后就宣告失败。当然，“会元术”的误差也是原因之一。而这一事件发生在13世纪末！

不过，并不是每个 13 世纪以后的人，对 3 的误差都能正确理解。墨守《圣经》词句的人把 3 看作是“上帝”“圣定”的，以致有资料记载：在近代，有一个国家的议会企图把 3 法定为圆周率。不过，联系到 12.3 说的故事，我们有理由猜测，这里的 3，是 3.2 这个值的误记；而“一个国家的议会”，应该是“美国印第安纳州议会”。

直到 18 世纪，不少人还认为 $\pi=3$。例如，法国人赛勒斯（Oliver de Serres），就说：“在某圆内作一个正三角形，再以三角形的边长为边长，作一个正方形。他将圆和正方形放在天平的两端，发现它们的重量相等，因此它们的面积也相等。由这项实验的结果，可以算得 $\pi=3$。”此事记载于舒伯特（Hermenn Schubert）在 1898 年出版的《数学随笔》一书中。

到了 19 世纪也是如此，一位叫马拉卡尔勒（Malacarne）的意大利人，于 1825 年在巴黎出版了一本研究化圆为方的书《几何解法》，也用到 $\pi=3$。此外，在 1862 年，美国人本生（Lawrence Sluter Benson）企图证明正方形周长与等面积圆的直径之比是 $\sqrt{12}$。由此，可以算出他的 $\pi=3$。但他同时又相信大家公认的 $\pi=3.141\ 592\cdots$。他的“三角恋”，使人哭笑不得。

不但如此，还有人写诗“赞美”$\pi=3$。例如，卡特（Harvey L. Carter）就曾写了这样的“五行诗”：

> 这是我最喜欢的工作：
> 替圆周率找个新的值。
> 就用 3 好了，
> 和 3.141 59 相比，
> 它不是简单多了？

这首“五行诗”，载于巴宁-古德（W.S.Baring-Gould）的《有趣的五行诗》中。

3. 学者无知闹笑话

这里，我们顺便提及一些西方学者对中国研究圆周率的成就的无知。1833 年，英国人纳林（J.Narrien）在伦敦出版了一本天文学方面的书《配图例说天文学简史》。书中说：“在这个古老的民族中，纯粹科学一直处于低劣状态。传教士们发现，在 13 世纪郭守敬称雄之前，他们认为圆径与圆周之比正好是 1 比 3……直到他们受到欧洲人的指导之前，没有前进一步……”这里，正如李约瑟所说，纳林“把郭守敬提到无可复加的地位”，但却对刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗、祖冲之等中国人的工作一无所知。

当然，这也并不全是纳林的错。因为他是在看到法国人宋君荣（A.Gaubil）于 1729 年在巴黎出版的一本书名很长的数学书上的记载之后，才这样说的。其后，又一位法国人塞迪约（L.P.E.A.Sédillot），也把这类说法写进他于 1845 年 9 月在巴黎出版的一部两卷本数学书中。以上广为流传的荒唐无知的说法，成了英国 19 世纪著名哲学权威和数学家休厄尔（1794～1866）名为《逻辑学史》的一套书的依据，他这套三卷本的书于 1847 年在伦敦出版。

不过，即使在西方，上述谬误也不可能永久流传。英国皇家学会会员、生化学家和科学史家李约瑟（1901～1995），于 1954 年开始出版《中国科学技术史》的第一册。这套书以较准确的史实揭示了上述谬误。这样做的还有一位美国记者坦普尔（Robert K.G.Temple）——汉名谭如波。他对《中国科学

技术史》作了“精彩的提炼”(李约瑟语)，写成了《中国：发明与发现的国度——中国科学技术史精华》，也指出了祖冲之等人算π的成就。这本书的中译本在1995年由21世纪出版社出版。

纳林提到并推崇的郭守敬是元代数学、天文学家。1276年，元世祖忽必烈接受他和王恂共同的老师刘秉忠的倡导，主张改革历法、建立新天文台，郭守敬和王恂受命担当此任。他们在北至西伯利亚、南至西沙群岛设立了27个观测站，进行大规模的“四海测量”。他算出一年的时间相对误差仅约$8/10^5$。他设计制造了包括“简仪”在内的近20种先进天文仪器。他主编的《授时历》一书在1280年完成，并在次年正式颁行。他创立了推算“赤道积度”、“赤道内外度”的新方法，从而实现了黄道坐标到赤道坐标的换算。这一成就解决了中国历代天文学家未能解决的问题。而且从数学角度看，这等于开辟了通往球面三角法的途径。他的这些成就，被包括李约瑟在内的许多中外学者推崇，因此国际月面地名命名委员会把月球背面西经134°、北纬8°的一座环形山命名为“郭守敬山”。

5.2 看起容易做起难——粗略π值“百花齐放”

在人们企图求得准确π值或其他活动——例如解决化圆为方问题的过程中，出现过许多粗略的π值。现摭要简介于下。

1. 求得准确π值并非“轻而易举”

也许有人会认为得到准确π值易如反掌，因为只要按某种公式或方法多花点时间、多用点精力计算就行了。当代人这个

看法在原则上并无错误，一些人也的确是这样干的。但问题是，古人们并不一定找到了正确的公式或方法；而且用速度远逊于当今电子计算机的人工计算，有限的时间和精力使他们力不从心，无法在算π的道路上高歌猛进。因此，得到多位精确π值对他们来说，依然是镜花水月。

也许还有人认为得到准确π值是很简单的测量问题：用尺子量一个圆的直径和周长，再把两者相比就行了；要得到更准确的π值么，那将圆画大点，尺子精度高点就行了。

但是，你千万不要以为这是“锦囊妙计”。不妨假定有一个直径为100毫米的圆，其周长应约314毫米。如果你用一条有刻度的细线来量的话，可能就不一定得到这个值：量出1毫米的误差是很普通的，那时算出的π值将不会优于3.13～3.15；加之直径也可能发生1毫米的误差，这时得到的π值将不会优于313/101 = 3.09和315/99 = 3.18。显然，用此法求到的π值将不一定是3.14，可能是3.09～3.18的某一值，碰巧也会得到3.14，但这个值在计算者的眼里丝毫不比3.09～3.18的其他值更“美丽动人”。

使用类似的实验方法，无论如何也得不到比较实用、准确的π值。这时，把圆加大和用更准确的尺子也无济于事，因为这时也必将发生各种误差。由此我们更加清楚，为什么古人长期对π更准确的值是多少，始终是一团雾水。事实上，在5.2的2（18）中，我们会看到清代人谈泰（约18世纪）的测量对上述观点的力证。

1997年，美国出版了《神奇的π》（The Joy of π）一书，汕头大学出版社2003年中文版21页中说：“拿支精度为0.1毫米的金属尺，就能测量出圆周率是3.1415+。”这种说

法正确吗?

首先,用精度为0.1毫米的金属尺量出圆的直径和周长,要想得到0.1毫米或0.1毫米以内的误差值是非常困难的,甚至可以说是不可能的。其主要原因在于圆周是曲线,而金属尺的刻度处是直的,两者并不“吻合”——我们无法像游标卡尺或千分尺那样“卡住物体”来精确测量;而不在于金属尺的精度——即使精度达到0.1微米也无济于事。

其次,即使我们的测量误差只有0.1毫米,用前面测直径为100毫米的圆的计算方法,得到的π值仅仅在3.138和3.146之间,而不能一定得到3.1415+。这里,3.138=314.1/100.1,3.146=314.3/99.9。

由此可见,现代外国人依然误以为测量法可以得到足够准确的π值,并不仅仅是古代中国人谈泰。

当然,测量法虽然不能准确求得π值,但用它来体验方法还是可行的。例如台湾省就有一个配合五年级下学期的“小朋友也可以做数学家”的动手实验:找一个大一点的圆形东西,如罐子、盖子……量一量直径、圆周,算一算圆周率。

看来,美国数学家卡斯纳(Edward Kasner)和纽曼(James Newman)在《数学和想像力》中的说法有趣而正确:“希腊哲学家发现2的平方根是无理数时,他们高兴地宰了100只公牛庆祝。如果他们发现π是超越数的话,一定会为这个更伟大的发现宰杀更多公牛。数学家再次证明常识是错的。”

2. 粗略π值林林总总

本书搜集到的50多个粗略π值成为12.2“历史上的π值表”中的一部分。下面仅记叙其中48个。这些值,如果取自

根式或分数，一般四舍五入到小数点后4位，其他则取自原文的数字。此外，由于这些π值的误差并不随时间的推移而一定减小，所以没有按年代而是按相对误差（四舍五入到百分数三位小数）由大到小的顺序编排，但同一出处的几个值排在一起时除外，9.16的3.12772未编入，也未排进“π值表”。

(1)4（27.324%）。1753年，法国警卫官卡尤萨斯（Joseph-Louis Vincens de Mouleon de Causans），割了一块圆形草皮剪成方形，从中领悟出“原罪”和“三位一体”——正弦、正方形、圆三者的联系，发现圆面积等于其内接正方形面积，从而得到$\pi=4$。他说，如果有人发现他的错误，他将奖给30万法郎的奖金。他“说到不如做到”，真的向法院付出1万法郎定金。但是，最终掌管奖金的理事们，却没有让任何人得到这笔奖金。

无独有偶，1855年英国牛津大学出版的《科学协会》上，也记有：“一位记者通过使每边相等于圆周长的1/4的方法作正方形，从而使圆面积等于正方形。”这也是说$\pi=4$。

(2) 3.4638（10.256%）。印度阿利亚巴塔曾给出球体积公式$V=0.5773D^3$，由此算得他的$\pi=3.4638$。阿利亚巴塔又译阿利亚布哈塔一世或阿耶波多、阿耶波多第一，也称圣使。

(3)2.828 427 1…（9.968%）。11世纪，普塞洛斯（Michael Constantine Psellus）通过对圆外切和内接正多边形的计算，得到$\pi=\sqrt{8}$，就是2.828 427 1…。他在当时的拜占庭享有“学术泰斗”的美誉，是当时最杰出的思想家之一，可惜对数学却是外行。

(4) 3.3750（7.430%）。中国古代算书《九章算术·少广》

中的球体积公式为 $V=9D^3/16$，容易算得，此时取 $\pi=3.3750$。此外，印度数学家马哈维拉在约850年用过相同的球体积公式，而这很可能也是来自中国。祖冲之或祖暅得到的球体积公式是 $V=11D^3/21$，这相当于取 $\pi=22/7$。显然这个值要准确得多，但印度的数学家却没有采用。

（5）2.914 213 514 815 11+（7.238%）杜德利还在《数学狂怪》（Mathematical Crank）中说："我是第一个不用'圆周率'计算出圆面积的人。此外，我还计算出'圆周率'的正确值：2.914 213 514 815 11+"。

（6）3.0033（4.402%）。5.1的2.中提到的《宋书·卷二十三·天文志》中还说："更铸浑仪，径六尺八分少，周一丈八尺二寸六分少。"由此可算得这个 π 值。

（7）3.0044（4.367%）和（8）3.0883（1.696%）（因两值取自同一资料，故排在一起，后同）。创作于公元前800～前200年的一部印度婆罗门教（后改衍化为印度教）丛书，叫《吠陀》。其中一部分是《绳法经》。这里，吠陀是梵文Veda的音译，意为"知识"、"光明"。这本专讲祭祀礼仪的书集中，记录了大约公元前20～前15世纪的赞美诗集《梨俱吠陀》中的许多数学概念。其中设计圣坛的几何法则中有"化圆为方"的作图题，题中的解法取 $s=3d/(2+\sqrt{2})$ 或 $s=13d/15$。两式中 d 为圆的直径，s 是要求的正方形边长。由此可算得 π 分别为3.0883和3.0044。

此外，在印度《圣坛建筑》中记载有以下两道作图题。①"化方为圆"。以图5-1所表示的正方形 $ABCD$ 的中心为圆心、OC 为半径画圆弧，与过点 O 且平行于 AB 的直线 OE 相交于点 E，截取 $LM=LE/3$，以 OM 为半径、O 为圆心作的

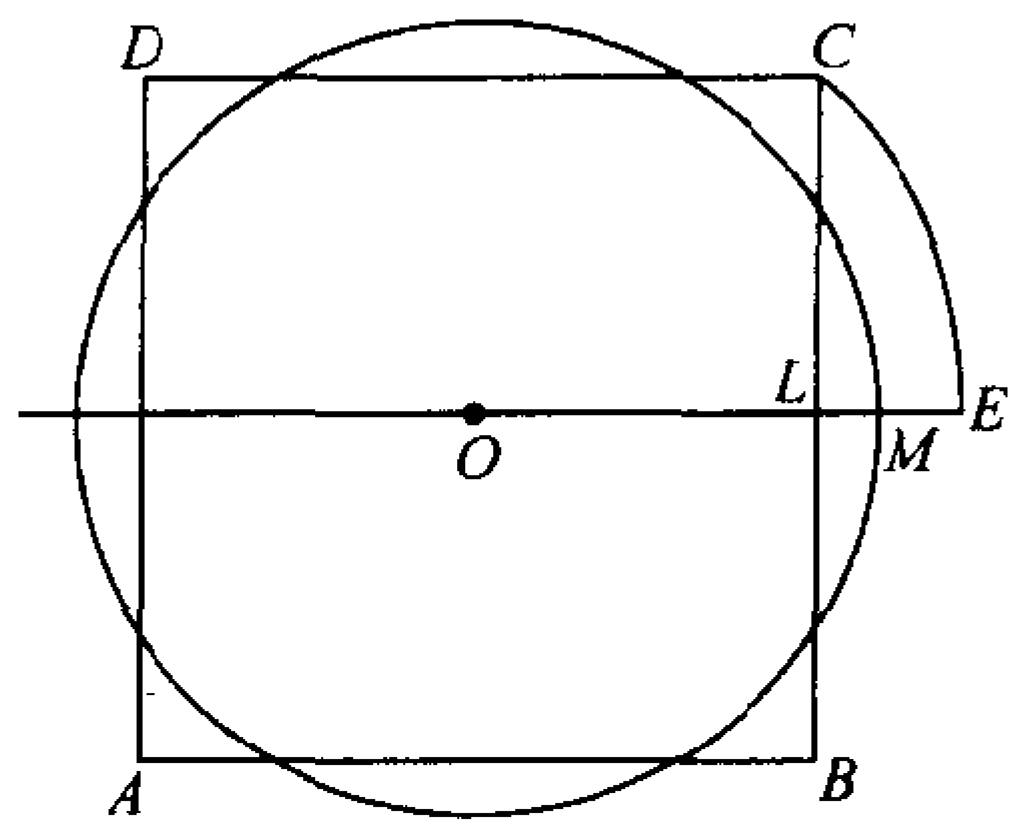


图 5-1

圆，即为所求。由此可算得该圆半径 $OM = (1/3 + \sqrt{2}/6)BC$，再由此半径求得圆面积，最后由圆面积等于正方形面积，就可以求得π=3.0883。② “化圆为方”。将圆的直径 d 分成 8 等份，再将其中 1 份 29 等分，并舍弃去其中 28 份以及所余 1 份的 1/6－1/（6·8），加上原来的 7 份，就得到相应正方形的边长 a，就是

$$a = 7d/8 + d/8 - 28d/(8\cdot 29) - [d/(8\cdot 29)]\cdot[1/6 - 1/(6\cdot 8)]。$$

最后由圆面积等于正方形面积，就可以求得π=3.0883。

由以上可见，古印度人似乎对 π=3.0883 “情有独钟”，以至用两种方法都得到 π=3.0883。

（9）3.0375（3.313%）。印度数学家马哈维拉，在约 850 年还给出过另一球体积公式 $V = 81R^3/20$。由此算得他的 π=3.0375。

（10）3.24（3.132%）。11 世纪，比利时东部列日（省和省会名）的弗兰科（Franco of Liege）给出了这个值。李约瑟称它是一个“很可怜的数值”。

（11）3.0476（2.992%）。茅以升的《中国圆周率略史》载：“临川纪氏（见《学疆恕斋笔算》）以为径一周三之下，原各二十一分而益其一之法，为后人传失，则圆率不尽之义，先民已开其端，所谓周三径一者，始约略言之矣。”由此可见，不知哪个朝代的“纪氏”得到π=3+1/21=3.0476。

（12）3.0588（2.635%）。明末“四公子”之一的著名哲

学家方以智，在《通雅》一书中有“径十七周五十二率”的记载，由此得知他的 $\pi=52/17=3.0588$。这个值还被他的次子、清代数学家、科学家方中通（1633～1698）在其历经“半生”写成的《数度衍》中采用。

（13）3.0625（2.518%）。印度数学家包德哈耶那（约6世纪），在大约530年得到 $\pi=49/16=3.0625$，其著作于1875年在英国出版。此外，杜德利在《数学狂怪》中也提到，1982年10月，一个叫V.J.的人自称，根据他的计算，π值恰好是3.0625。

（14）（$3.202\ 216+10^{-7}\cdot24/361$）（1.930%）。英国人巴特勒（William Baddeley），在伦敦出版的《机械》杂志1833年8月号上，发表了《机械化圆为方》一文，说一个直径为19/10英寸（1英寸＝2.54厘米）的圆铜片和一个边长为17/10英寸的正方形铜片面积相等，并称之为“正方形对圆的17:19规则”。不难算出他的π值是（$3.202\ 216+10^{-7}\cdot24/361$）$=3.202\ 216\ 066\cdots$。

（15）3.2（1.859%）。1666年，英国伦敦著名哲学家霍布斯（1588～1679）认为 $\pi=3.2$，发表在他1668年出版的《物理问题》一书中。但遭到荷兰物理学家、数学家惠更斯（1629～1695）和英国数学家沃利斯的驳斥。

3.2这个值在1892年被美国《纽约论坛》的一个作者旧话重提。他声明：这个值存在于“蚌线”即“尼科梅德斯线”之中，是被重新发现的长久失传的秘密。他的声明引起了一场持久的轩然大波，直到20世纪初才平息。他的支持者甚至用3.2来反对被公认的π值。尼科梅德斯（约公元前2世纪）是古希腊数学家，4种蚌线都是他定义的。他还用这些蚌线解决

三等分角和倍立方体的问题。

1897年2月5日，美国印第安纳州众议院还通过了 $\pi=3.2$ 的议案，但最终未获参议院通过，从而并未成为法律条款，详见12.3。日本人早期也曾用过3.2作 π 值。

(16) 3.179 024 7 (1.191%)。这是因取“庣旁”不同而得到的另一种歆率。在《国学》季刊5卷2号上励乃骥《新嘉量五量铭释》文中有来源的说明。

(17) 3.1666… (0.798%)。是19/6化成小数的值。1854年，约翰·戴维斯 (John Davis) 在《圆的测量》中说：“我用数字计算之后，发现这个值是6比19。用19除以6，就得到圆周率3.1666…。有人问我，你是如何证明直径和圆周之比是6比19的？我回答说，大家都认为苹果是酸的，所以苹果就是酸的，这就是证明。”真是“乱拳打死老师傅”。

(18) 3.1623 (0.659%)。为 $\sqrt{10}$ 的约值。除了张衡和19世纪日本幕府时代即将结束前期用过这个值以外，还有几位晚于他的印度数学家也用过它。他们是：

①著名天文学、数学家瓦拉哈米希拉（约6世纪），约在505年。

②婆罗摩笈多即梵藏（约598～660），在约628年的《婆罗摩笈多文集》中，他的方法是求出直径为1的圆内接正12，24，48，96边形的周长分别是 $\sqrt{9.65}$，$\sqrt{9.81}$，$\sqrt{9.86}$，$\sqrt{9.87}$ 的这个“趋势”出发，大胆地推测，圆内接正多边形趋近于圆时，它的周长就是 $\sqrt{10}$。

③马哈维拉，在约850年的《计算纲要》中。

④婆什迦罗或婆什迦罗二世，即巴斯卡拉二世，也称印度王，约在1150年。

英国哲学家霍布斯除如前述给出 3.2 外，还在伦敦于 1678 年出版的一本书中给出 $\sqrt{10}$。此外，阿拉伯数学家花拉子米（780 至 783～835 至 850）在约 825 年、中国清代数学家王元启（1714～1786）、钱塘（活跃在康熙年间）等也用过 $\sqrt{10}$作π值。

说起钱塘等清人的 $\sqrt{10}$，还有一段趣闻。钱塘认为，刘徽等人的割圆术，绝不可能得到准确的 π 值。他认为自己创造的 $\sqrt{10}$作 π 值，才“甚合数理之自然”。中国清代数学家阮元（1764～1849）等著《畴人传》（1799）中在“钱塘传”的后面写道：秦九韶也以 $\sqrt{10}$作为圆周率，和钱塘的值正好相同，这正是“盖精思所到，阐合古人也”。

不但如此，还有人企图“用事实说话”，以证明 $\sqrt{10}$的不可改变的正确性，江宁人谈泰就是其中的一个。他做了一个直径为一丈的大木板，再用篾尺量它的周长，正好是三丈一尺六寸多一点，于是便认为“钱塘周率为至当不可易”。

对这段史实，中国数学家钱宝琮（1892～1974）评论道：“然则钱塘、谈泰、阮元等非特不明西法，并不知中国旧学者也。”由此可见，直到 18 世纪，这些中国学者对测量误差的认识是非常不够的。当然，用实测的方法求 π，谈泰还不是最早的，最早的是明代数学家邢云路（1580 年中进士）。用茅以升在《中国圆周率略史》中的话说，是“云路欲以度量所得，抹煞古人诸率，所见甚浅。……然以实验求率，邢固第一人矣”。

不过，最早取 $\sqrt{10}$作 π 值的很可能是印度人。早在公元前约 6 世纪兴起的耆那教经典之中，就有 $\pi=\sqrt{10}$的记载。

由上述可见，历史上有许多人都用 $\sqrt{10}$作 π 值。一个奇怪而有趣的问题是：为什么 $\sqrt{10}$被许多人作为圆周率值呢？这里

虽不能作出完全满意的回答，但是可以设想，除了“10”这个“规则”的整数似乎应该和“规则”的圆相联系外；也许更重要的是：中世纪流行着一种常被采用的平方根近似公式为 $\sqrt{a^2+b}=a+b/2a$，由此易算出 $\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1}=3+1/(2\cdot3)=3.16\cdots$。也有人认为，“圆”就是应该天然地和（开）“方”联系在一起。

那么，张衡是用什么方法得出 $\sqrt{10}$ 的呢？他的算法记载在《九章算术·注》中，大致内容如下。

东汉时代，球体积的准确算法尚未发现，因而有一个很长的时期内，人们都误以为球体积和它的外切圆柱体积之比，等于这个圆柱体积与它的外切立方体体积之比，而且等于平面圆面积与它的外切正方形面积之比；且这三个比值都是 3∶4。由此可得：球体积与它的外切立方体体积之比为 $3^2:4^2=9:16$，于是得到球体积公式是 $V=9D^3/16$。《九章算术·少广》“开立圆术”（即由球体积求直径的方法）就用 $D=\sqrt[3]{16V/9}$，但此时所得的直径太小。

张衡在注《九章算术》时，曾做了一个金球，想用它来校正此书中球体积计算的巨大误差。但他对上述理论上的错误并没有觉察，而只着眼于纠正 π 值，以为问题出在 π 值上。他说 $V\neq9D^3/16$，而是 $V=9D^3/16+D^3/16$，即 $V=5D^3/8$，于是 $D=\sqrt[3]{8V/5}$，可见，他的本意是将球体积公式改得更准确些，然而却适得其反。他的体积公式差得更远：$5D^3/8-\pi D^3/6>9D^3/16-\pi D^3/6$。但他却从这个经验公式推得：球体积与它的外切立方体体积之比为 5∶8；然后，再依照前述《九章算术·注》中的方法得：平面圆面积与它的外切正方形面积之比为 $\sqrt{5}:\sqrt{8}$，即 $(\pi R^2):(4R^2)=\sqrt{5}:\sqrt{8}$，由此算得 $\pi=\sqrt{10}$。

（19）3.121 320 34（0.654%）和（20）3.121 303 4（0.646%）及（21）3.126（0.496%）。明神宗时代邢云路的著作《古今律历考》72卷中，有后两个π值，但茅以升说他的近似π值是前一个，记于《畴人传》中。看来，有可能前两个π值中的一个有笔误。邢云路所用方法同晚于他的前述谈泰的测量法。

（22）3.160 49…（0.602%）。在兰德纸草书即莱因特（A.Henry Rhind）纸草书中发现，古埃及人认为圆面积等于以其直径的8/9为边长的正方形面积。这实际上取的是$\pi=(4/3)^4=3.160\ 49\cdots$。对于上述数学史家的看法，梁宗巨提出了疑问。以下是他的看法。

兰德纸草书第50题为："一块圆形的地，直径是9海特（古埃及长度单位，1海特一说合21米，另一说合100腕尺即约50米），问面积是多少？"其算法是：圆面积等于直径减去它的1/9，然后再平方。本例直径是9个单位，减去它的1/9，剩下8，平方后为64，这就是圆面积。所以答案是64塞泰特（即海特^2）。从图5-2兰德纸草书的一部分可看出，从上到下依次是49～52题。两题间用横线隔开。其中51和52题分别为求三角形和梯形面积的题，对比两题可看出，作者没有完全掌握梯形面积的计算公式。由此可见当时对面积的计算仅有粗浅的认识，而不大可能掌握圆面积的公式，也就不大可能如上述史学家所认为的那样，相当于使用了$\pi=3.1605$。

那么，上述经验公式即50题的算法又从何而来呢？梁宗巨接着分析：其实仅凭直接观察就可以看出，如果一正方形和圆等面积时，则此正方形的边应比圆的直径小一点。究竟小多少？不妨测一下。这本兰德纸草书的41题已知直圆柱底直径

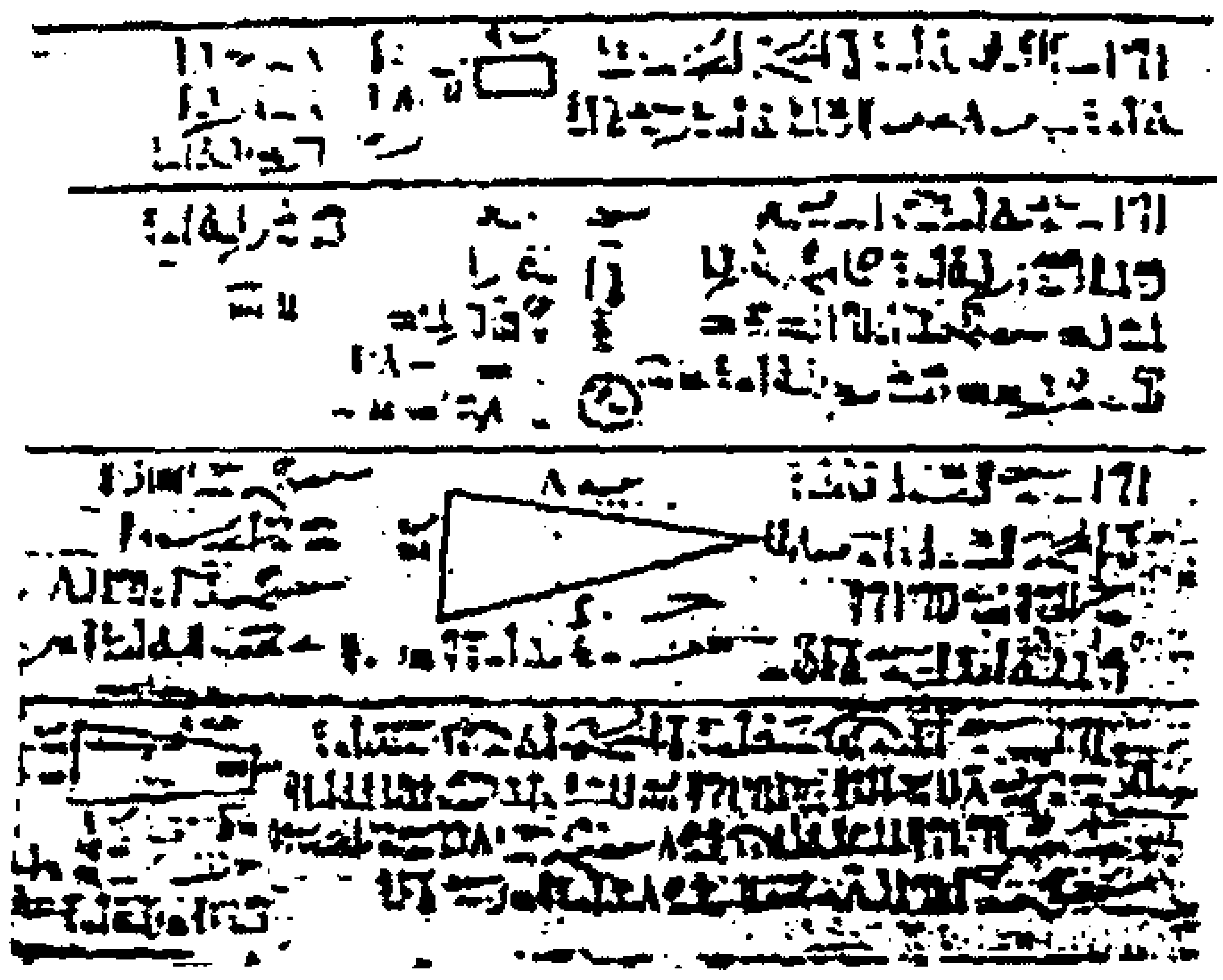


图 5-2　兰德纸草书的一部分

9，高 10，求体积用的是底面积乘高来算，算法中求底面积和 50 题的圆所用方法是一样的。因此，可以设想他们制造了一些与直圆柱等高的正四棱柱，装上水或沙子，然后和直圆柱比较容积大小，不难发现正方形的边长，是圆直径的 8/9 的时候，容积差不多相等。于是，就有前述 50 题的算法（公式）——“直径 8/9 的平方，等于圆面积”。他们所知道的就是这些。至于圆面积、周长和圆周率之间有什么关系，也许他们压根儿都没想过。

纸草（Papyrus）是尼罗河下游潮湿地带生长的、高约2 米的一种水生植物。古埃及人将它的茎剖成薄片，压平晒干后作书写材料。将若干片粘成长幅，卷在木杆上形成卷幅，所以这种纸草书又称纸草卷（Rhind Papyrus)。这种“书籍”在埃及已经发现了很多，但著名的却只有两卷。一卷是英国的爱尔兰古董商兰德（A.Henry Rhind)，于 1858（一说 1850）年在特贝的废墟上发现搜集到的，称兰德纸草书。它长 544 厘米，宽 33 厘米，含 85 道数学题及其解答，所记载的内容是公元前

35世纪以前古埃及人的数学知识，现存于英国伦敦大英博物馆的东方展室里。这本书的作者是古埃及祭司、司书、数学家艾哈麦斯（约公元前20世纪或前16～17世纪），所以又称艾哈麦斯纸草书。

这本现存下来最早的数学书，叫《阐明对象中一切黑暗的秘密的事物的指南》——因卷首那句“获知一切奥秘的指南”的话，便获得这个译名或含义相同的译名。由于书中的许多内容都是从金字塔时代一份更早的文献抄来的，所以有人认为其内容可能涉及公元前50世纪。由于该书解答某些问题时还给出了一般法则，所以一些人认为这本纸草书是当时的一种计算手册。这卷纸草书是由一位叫艾森罗尔（Eisenlohr）的人，于1877年在他所著的《古埃及数学手册》中解读的。

另一卷是莫斯科纸草书，是1893年在埃及购买的。因现存于莫斯科博物馆而得名，它的全长也是544厘米，但宽度却仅有8厘米，记有25个数学问题，成书年代与兰德纸草书相当。其中也有可以推得$\pi=3.1605$的内容。

此外，美国人海塞尔（Carl Theadore Heisel），于1935年在《数学和几何的论证》一书中给出了$3+13/81$，这个值与$(4/3)^4$完全一样。他自费印刷的这本书长宽厚分别为10，13/2，5/4英寸，并无偿地送给各种图书馆。

（23）3.1250或3.125（0.528%）。这个值出自距巴比伦约300千米，距伊朗西南迪兹富勒之南24千米的苏撒，于1936年出土的一块泥版书上。这块泥版书把正六边形的周长与其外接圆周长之比，取为$57/60+36/3600$。不难算出$\pi=3.1250$。

公元前146年，罗马取代希腊成为地中海一带的统治中心。此时罗马享有盛名的建筑学、数学家维特鲁维厄斯（公元

前2～前1世纪)，在公元前25～前20年也用过3.1250；虽然他博学多才，是最早描述通过旋转的轮子来直接测量距离的人，肯定应该知道阿基米德比3.1250准确得多的3.14。这一史实说明，罗马人在取代希腊成为地中海一带统治者时，却没能继承和发扬希腊光辉灿烂的数学成就。另外，有人说，“罗马的比特尔-比乌斯使用的圆周率”是25/8，不知他是不是维特鲁维厄斯？

此外，德国数学家斯蒂费尔（1486或1487～1567），在他于1525年写的一些著作中也认为，一条对角线为10的正方形和一个直径为8的圆的面积近似相等。由此，易算出他的π为3.1250。斯蒂费尔的趣闻轶事之一是，曾预言1533年10月3日为“世界末日”。听了他的宣传，其追随者毁掉或消耗掉所有的财物，惶惶不安地等待着这一天的来临。由于这一蛊惑人心的预言和传播被视为异端邪说的新教，他这个新教牧师被当局投入监狱。

时光飞逝。到了1836年，法国巴黎有一个出色的打井者拉·柯梅（La Comme)。他向一位有名的数学教授求教：要铺设一个井的圆形底部要多少石头？教授说，这个问题无法回答，因为圆周长和直径的比没有确定。这个认真的、但又未解决实际问题的回答，使拉·柯梅陷入深思。经过一次偶然的数学学习之后，他宣布发现了周长与直径的正确比率25/8即3.1250。虽然在18世纪末π值已被算到小数点后152位，但他还是因为这一“独立的发现”，荣获巴黎科学院颁发的几枚奖章。真是“普天之大，无奇不有”。

3.1250这个π值，还于1860年出现在英国利物浦的詹姆斯·史密斯（James Smith）的作品中。他先后出版了几本书和

小册子来讨论它的准确度，甚至尝试把它带到英国高级科学协会去。他还在 1872 年出版的《方圆问题和圆的几何学论证》中，振振有辞地说："每当我把对手问得无话可说时，他们总会以没时间为借口，不回答我的问题。"他还说："过去没有人能反驳我的结论，以后也不会有。……圆周和直径的比是 25/8。"

出生在印度东南马德拉斯（省和省会名）的英国数学家德·摩尔根（1806～1871）和休厄尔（1794～1866）教授，甚至著名数学家哈密顿（1805～1865）都尽力劝说詹姆斯·史密斯认识自己的错误，但都以失败告终。在一封给詹姆斯·史密斯的信中，休厄尔给出了下面的证明："你计算圆内接正 24 边形时会发现，这个圆的半径是 1 时，可算出这个 24 边形的边长为 0.264，现根据你的主张，就算出一条边所对的弧长是 3.125/12 = 0.2604。这样，就会得到弦比它对应的弧更长的结果。你知道，这是不可能的。"

中国学者也不止一次用到 3.1250。例如，汉代数学家蔡邕（133～192）在 2 世纪认为，"王衡径八寸，周二尺五寸强"。显然，可以由此算得 $\pi = 3.125+$。这个值虽然比 π 取 3.125 的误差还大，但却是对古率 3 的又一次修正。前述得到 $\pi = 52/7$ 的方以智，也得到过 25/8 即 3.1250，这点我们在 2.6 中提到过。清代长洲数学家顾长发在《圆径真旨》一卷《圆径周数》中，清代仁和数学家袁士龙（康熙年间）在《测量全义新书》两卷中，清代南靖数学家庄亨阳（1686～1746）在《算书》中，都采用了"智率" 3.1250 或 3.125。由此可见，清代学者们对它们似乎也偏爱有加。

（24）3.1555…（0.446%）。王蕃曾经以勾股法求得天顶

至地之数为813 94+，乘以2为162 788+，这称为天径之数；并以他的π值乘天径之数得周天之数513 687+。显然，这里王蕃的$\pi=(523\ 687+)/(162\ 788+)=3.155+$。有人因为《隋书·律历志》记载次序，可以看出王蕃列于刘徽之后，便对王蕃如何得到这个值产生了如下猜测：蕃率是修改徽率所得到的。即王蕃用了$\pi=3+x$及$\pi=3.14+y$，取$y=0.1x$，从而解得$x=7/45$，并因此得到$\pi=3+7/45=142/45=3.1\dot{5}$的。上述"周天之数"那段话，采自《海潮赋后序·唐文粹卷五》，作者是卢肇。"猜测"那段话，采自《隋书·律历志祖冲之记事释》，作者是中国数学家严敦杰（1917～1988）。那么，是不是王蕃活动于刘徽注《九章算术》之后呢？中国现代数学家孙炽甫说："刘徽九章算术注序于公元263年，而王蕃却在39岁卒于公元259年，从时间上来考察，似乎蕃率发表在先，因而上述推测是很难成立的。"因此，"王蕃所谓勾股法原术及上述史实究竟如何，尚容继续考证。"不过，这里说王蕃卒于259年值得核实，对此，我们将在11.3中讨论。此外，142/45这个分数，一些文献认为是"经验值"。

（25）3.1547（0.417%）。钱宝琮由刘歆曾经为王莽造嘉量斛，由此考证刘歆得到3.1547。又因为嘉量斛造成于建国元年即公元9年孟夏，中国数学家李俨（1892～1963）据此推测这一"刘歆率"成于此年。据孙炽甫的介绍，这个值是据刻在嘉量斛上的铭文推算出来的。这段铭文是："方尺而圆其外，庣旁九厘五毫，幂百六十二寸，深尺，积千六百二十寸，容十斗"（1斗=10立方分米），这是说这个容器的几何尺寸，而其平面图形如图5-3所示。

上述"庣"是指图5-3中正方形对角线的延长线上止于圆

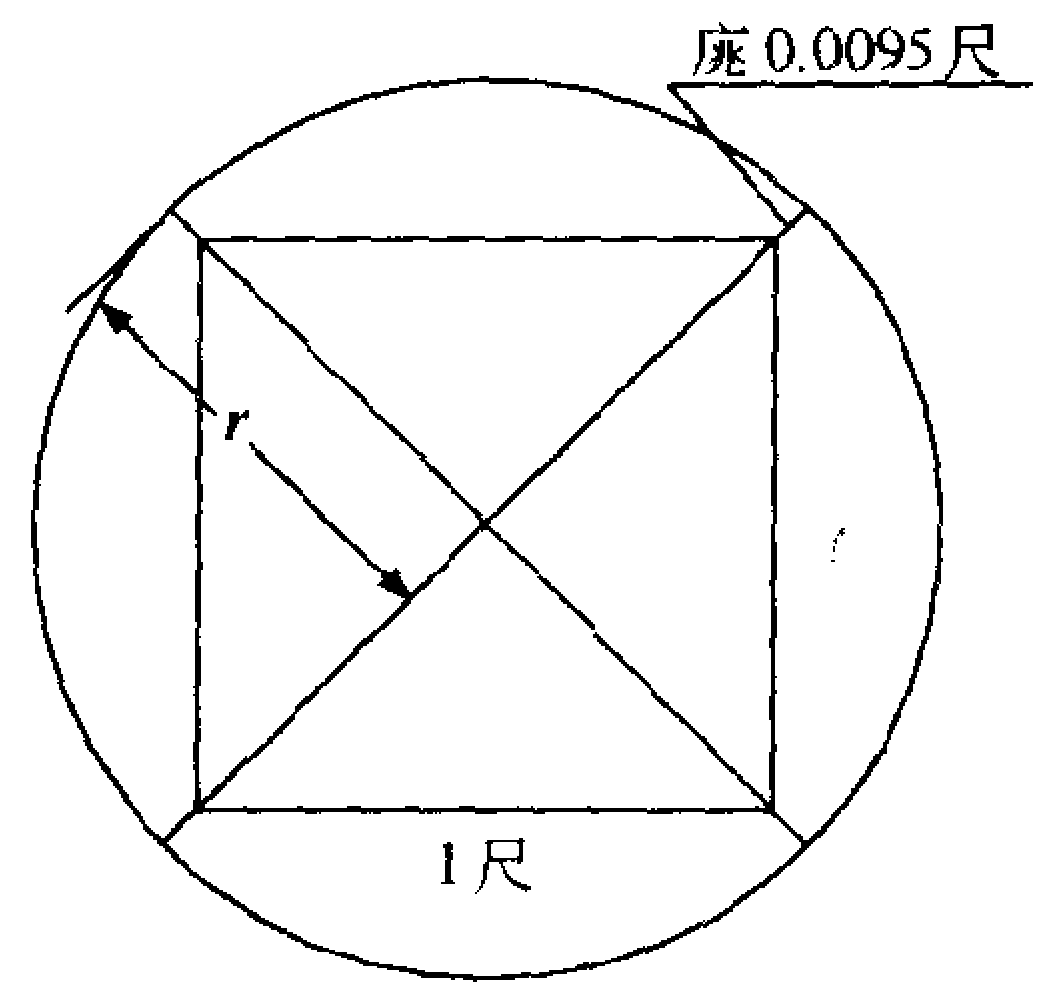


图 5-3

周的那一小段。由这段铭文可算得该容器的直径为：$\sqrt{2}+0.0095\cdot2$ 尺＝1.4332 尺。由此算得圆的面积为 $\pi\cdot(1.4332/2)^2=1.62$，即可算得π＝3.1547。

舍普勒写的《π 的年表》认为，"Liu Hsing"（刘歆）之父"Liu Hsiao"（刘向），在 25 年求得 π＝3.16，但未说明来源。这也许是取 3.154 7 的过剩近似值吧。刘向是汉代光禄大夫，父子俩曾主持校订秘书、典籍。此外，如取不同"庣旁"，可得到另外一个歆率——3.179 024 7，这在2.3 和 5.2 的 2.(16)已经谈到。

(26) 3.1525(0.347%)和(27)3.152 05(0.323%)。17 世纪中叶，明代数学家陈荩谟，在他的《度测》三卷等一系列著作中用它们作 π 值。不过，另有两个资料只分别提到3.152 05 和 3.1525；因此，可能其中一个值记载有误。

(28) 3.1362(0.172%)。这是$3(\sqrt{3}+\sqrt{6})/4$ 的约值。欧洲人在 13～15 世纪用过它。例如，1464 年，德国数学家德·库萨·尼古拉斯(1401～1464)通过作图和"严格"的论证得到 $3(\sqrt{3}+\sqrt{6})/4$。

其实，尼古拉斯用这个值表示 π，并不"严格"。他的学生和朋友、德国天文学、地理学、数学家约翰·穆勒（1436～1474），指出他的 π 值有误的、寄给他的信写于 1464 年或者更早，但直到他们死后的 1533 年才被公开。尼古拉斯这个渔夫的儿子也是一位天文学和物理学家，后来到了罗马，于 1448

年 12 岁时成为红衣主教和罗马的统治者。

(29) 3.1378 (0.121%)。1928 年 3 月，美国的伦泽尔 (Gottfried Lenzer)，向明尼苏达大学捐赠了他在 1911～1927 年间研究三大几何作图问题的 60 幅图。他发表在《美国近代数学》37 卷 1930 年 8 至 9 月号 343 页上的《一些经典几何问题的新解法》里，在化圆为方的解法中得出 $\pi=3.1378$。

(30) 3.143 43 (0.058%)。约翰·穆勒在前述信中指出老师的 π 值有误后，提出了这个 π 值。约翰·穆勒以他的笔名雷格蒙塔努斯 (Johannes Regiomontanus) 更为著名。他出生于德国东普士的哥尼斯堡，就是今天俄罗斯加里宁格勒附近的安费德。由于哥尼斯堡的德语意思为“王者之山”，所以他的名字旧译为“玉山若干”，而上述雷格蒙塔努斯的笔名也是由“哥尼斯堡”一词拉丁化而来的。

约翰·穆勒在 1461～1464 年间写成的《论三角》一书，正式出版于 1533 年。加上他的其他工作，使三角学成为脱离天文学的一门独立学科。1475 年，罗马教皇召他去罗马参加历法改革，并任他为雷根斯堡大主教，但他没有到任就早逝了。

(31) 3.1429(0.042%)。2.6 说何承天得到 3.1429，那是他用“调日法”由 $75/65<\pi<365/116$，经过 304 次调整得到 111 035 / 35 329 之后算出来的。

(32) 3.1427 (0.035%)。明代数学家朱载堉 (1536～1595 或 1611 或 1614) 在他的一系列天文学著作，例如 1610 年的《嘉量算经》三卷中，取 $\pi=\sqrt{2}/0.45$，由此得 $\pi=3.1427$。

(33) 3.1426(0.032%)和(34)3.141 605 5(0.000%)。荷兰 (?) 数学家伊克 (Simon van der Eycke)，在 1584 年给出

$\pi=1521/484=3.142\ 56\cdots$。1585 年，鲁道夫通过计算圆内接正 192 边形的边长后得知 $\pi<3.142\ 05<1521/484$。同年，伊克将 π 值定为 3.141 605 5。

(35) 3.1423 (0.023%)。法国巴黎的数学家波耶勒斯(Charles Bouelles)，在他的一个对开本中给出他改进的德·库萨·尼古拉斯作图法，从而得到 $\pi=3.1423\cdots$。这个对开本于1503 年在巴黎出版，他是第一个科学地提出“摆线”的人，也是一个宗教学教授。德·库萨·尼古拉斯在解决“化圆为方”的时候，也得到 3.1423。

(36) 3.1409 (0.022%)。丹麦哥本哈根的数学家第谷·布拉赫(1546～1601)（图 5-4）在 1580 年得到 $\pi=88/\sqrt{785}=3.1409$。他也是著名的天文学家，大名鼎鼎的“天空立法者”德国天文学家开普勒(1571～1630)就曾当过他的助手。第谷·布拉赫年轻时傲慢自大，曾因争论一个数学问题，和帕斯贝格(Passberg)决斗，被一剑削去了鼻子。此后，他只好用自己“美容”——随身携带的粘合剂，随时将一个金子（一说金银合金）做的假鼻子粘上。


图 5-4　第谷·布拉赫

(37) 3.142 000 0 (0.013%)。达特 (Francis Michael Darter) 在他 1962 年出版的《圆周率的正确值》中说：“我今年 81 岁，……经过三天的苦思，我终于研究出圆周率的正确值。……其实答案就在这座金字塔的结构中。她证明造物主使用的圆周率公式是 $3+(7.1/50)=3.142\ 000\ 0$。……既然天使

米迦勒也用这个值，我们也应该使用这个值。”

(38) 3.1418(0.007%)。意大利数学家皮舍诺（1170～1230或1175～1250），于1220年得到的近似π值，是1440/(458+1/3)，即约3.1418。他没有完全采用阿基米德的方法，而用自己独创的割圆术，将圆内接和外切正多边形都算到了96边，从而界定了π值的范围是1440/(458+4/9)=3.1410…<π<1440/(458+1/5)=3.1427…，然后取中间数得到3.1418。

皮舍诺还有一个更为人知的名字——斐波那契（Leanardo Fibonacci）。著名的斐波那契数列早已闻名于世，其广泛用途被不断发现，以致美国数学会在1963年就成立了“斐波那契协会”，并于同年正式创办《斐波那契季刊》。他的父亲波那契奥（Bonccio）是当地的商人，也担任关税管理人。这一有利条件，使他曾跟父亲到过西亚、北非和欧洲许多地方，1202年回国后不久便写出了著名的《算盘书》。

(39) 3.1414(0.006%)。德国柏林数学家赫塞（Hesse），在1776年写的一本算术书中，给出了π=3+14/99，即π=3.1414。

(40) 3.141 76(0.005%)。“直觉的想法总是那么浑然天成，因此我认为直觉判断就是真理。既然是真理，就该把它公之于世，哪怕会引来恶意的批评。”这是萨本（James Sabben）在他的《将一群相关角三等分的方法》中说的话。那么，他的“直觉真理”是什么呢？他在书中说，是π=3.141 76。

(41) 3.141 75(0.005%)。阿拉伯人阿尔·比鲁尼（973～1038至1050）用的π值。

(42) 3.141 661 368 32(0.002%)。1696年，日本数学家

古郡解用了这个 π 值。

(43) 3.141 590 1 (0.000%) 和 (44) 3.141 592 5 (0.000%)。《翠微山房算学》中，有“径 114 周 354.999 69”和“径 7 周 21.991 148”的记载，由此算得这两个 π 值。

(45) 3.141 594 269…(0.000%)。1851 年，帕克尔(Johu Parker) 出版了一本《化圆为方》的书，给出的 π 值为 206 12/6561 = 3.141 594 269…。他的这个值可能源于作图。

(46) 3.141 592 8(0.000%)。1699 年，日本数学家三宅贤隆用了这个 π 值。

(47) 3.141 592 650 00…(0.000%)。1863 年 1 月，英国人德拉克 (S.M.Drach) 撰文建议用这个 π 值求圆周长。有人计算，用它求 14 000 英里 (1 英里合 1609.344 米) 的周长时，误差仅为 61/60 英寸。

(48) 3.141 592 65…(0.000%)。明末清初的数学家梅文鼎 (1633～1721)，在 1710 年完成的《方圆幂积 (法)》中，取这个 π 值，但不知他是如何得到的。他的孙子梅珏成 (1681～1763) 也“孙承祖业”，在《数理精蕴·下篇·卷二十》中，用 π=3.141 592 65 入算，而且证明了祖冲之的密率 355/113 与真值相差很小。

除了以上 48 种粗略 π 值外，第七章中还记有多种作图法求得的近似 π 值。

5.3 从阿基米德到格林贝格——古典法算 π 及数值

人类最早算 π 的科学方法是古典法——形形色色的割

圆术。

所谓割圆术，就是先作出圆的边数较少的内接或外切正多边形（有时两者都作），通过计算其边长进而求出周长或面积（有时两者都求），再将正多边形的边数增加一倍，重复上述计算；再增加，再计算……；这样，当边数无限增加时，算出的这些正多边形的周长（或面积）就接近圆周长（或面积）了；由此就可根据圆周长（或面积）公式求得 π 值。当然，实际上不可能把边数增到无限多，所以一般都算到某一边数为止，再把 π 值界定在某一范围内或取近似值。很显然，此法要以已知圆周长（或面积）公式为前提。

中西割圆术稍有不同，但本质一样。中国主要由圆内接正多边形逼近圆求 π，西方则常用内接与外切正多边形两面“夹攻”，以算术平均求 π。有的求面积，有的求周长，有的求面积比。

阿基米德是割圆术的开山鼻祖，我们的叙述自然从他开始。

1. 科学割圆从阿基米德开始——223/71＜π＜22/7 及 π＝3.14，22/7

大约在 825 年，阿拉伯杰出的数学、天文学家花拉子米著有名作《代数学》一书，其中有以下内容：“最好的方法是把直径乘以 22/7，这是最迅速最简单的方法。只有上帝才知道比它更好的方法了。”由此可见，1000 多年后的花拉子米，对 22/7 是那么推崇。那么，这 22/7 是什么人得到的呢？这个人就是古希腊数学、物理学家阿基米德。

阿基米德求得 223/71＜π＜22/7 和 3.14，22/7 用的是

“割圆术”，载于他的名著《圆的度量》（图5-5）中，计算的年代大约是公元前 240 年。阿基米德求 π 时使用了不等式 $265/153<\sqrt{3}<1351/780$，但他没有说明来源。后人只好作出种种推测，很多数学史家认为他是用不等式 $a\pm b/(2a\pm 1)<\sqrt{a^2\pm b}<a\pm b/(2a)$ 推出来的。他求 π 的过程大致如下：

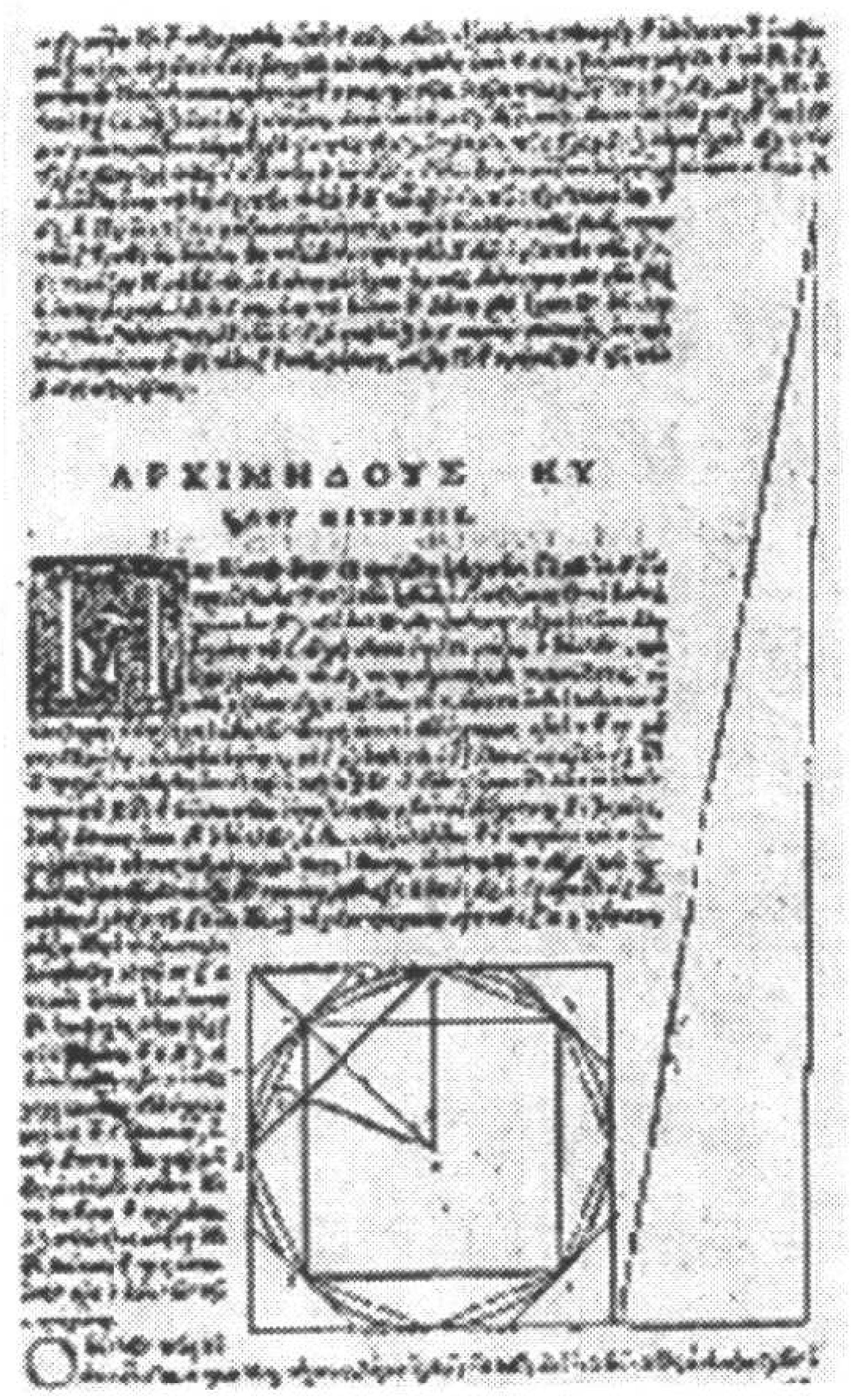

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥ

图 5-5 《圆的度量》第 1 页

如图 5-6，O 为圆心，AB 为⊙O 的外切正六边形一边的一半，OA 为半径，$\angle AOB=30°$，OC 是 $\angle AOB$ 的角平分线。显然，此时有 $OB:AB=2$，$OA:AB=\sqrt{3}>265/153$。把这两个式子相加，就得到 $(OA+OB)/AB>571/153$。又 $OB:OA=CB:AC$，$(OA+OB)/OA=(AC+CB/AC)=AB:AC$ 或 $(OA+OB)/AB=OA:AC$。这个式子与前面所说的 $(OA+OB)/AB>571/153$ 比较，就得到 $OA:AC>571/153$。

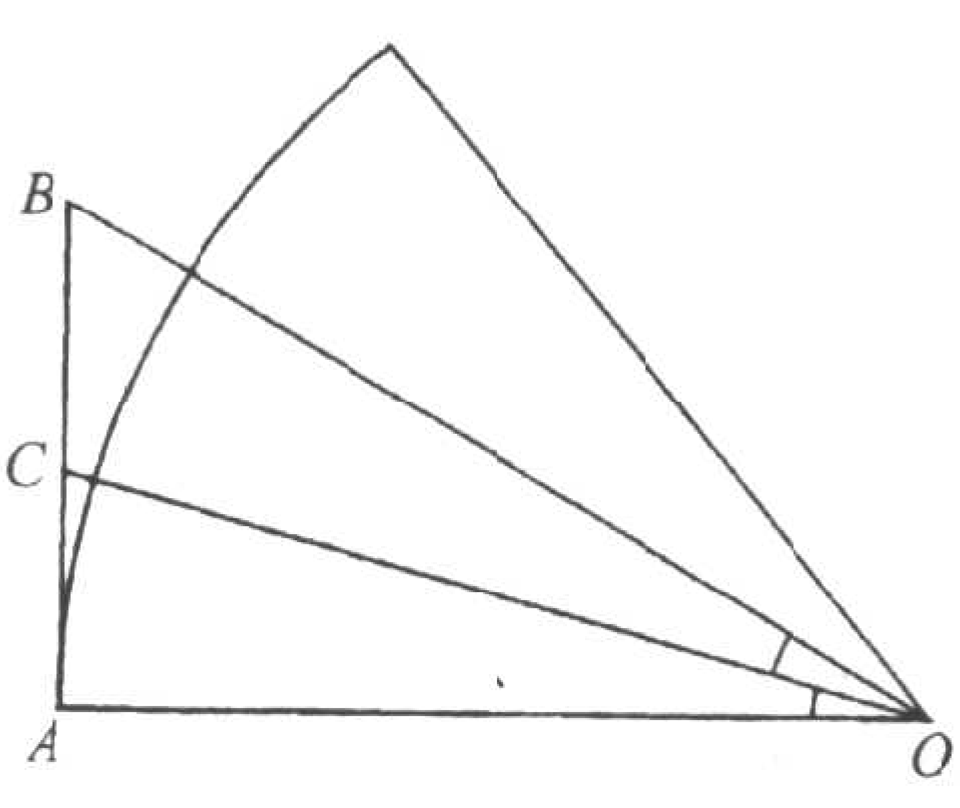


图 5-6

从这个不等式出发，立刻可以推出圆外切正六边形、正 12 边形的周长与直径之比的上界。同样，计算圆内接正多边

形的边长，可以确定比值的下界。利用比例关系和勾股定理重复上述过程，一直算到 96 边形，最后就得到223/71＜6336/(2017+1/4)＜内接正 96 边形周长/直径＜π＜外切正 96 边形周长/直径＜14 688/(4673+1/2)＜22/7。由此可得出 223/71＜π＜22/7。实用上取较简单的 22/7，而不取 223/71。

由上述可以得出以下结论：①阿基米德科学而准确地首次确定 223/71＜π＜22/7。②取 π 两位实用值为 3.14 或 22/7。③理论上指出了一种可以求得任意准确度的 π 值的方法——割圆术，这种方法也被称为“古典方法”；著名学者李毓佩在《科学的发现(二)——圆面积之谜》中，形象地把它比喻为两个小朋友从胡同的两头共同堵捉一只鸡。④第一次在科学中提出误差估计及其精确度和如何确定的问题，即用上下界确定近似值；这与其后祖冲之用盈朒二限确定 π 值得范围，有异曲同工之妙。由此看来，阿基米德的确在这里树立了一块伟大的数学丰碑。

此外，由割圆术中出现的圆内接正多边形周长 p，面积 a，圆外切正多边形周长 P，面积 A，它们的边数 n，可以建立一组有趣、优美、妙不可言的关于调和平均、几何平均的不等式

$$\frac{2}{P_{2n}}=\frac{1}{P_n}+\frac{1}{p_n}$$

$$p_{2n}=\sqrt{p_n\cdot P_{2n}}$$

$$\frac{2}{A_{2n}}=\frac{1}{A_n}+\frac{1}{a_{2n}}$$

$$a_{2n}=\sqrt{a_n\cdot A_n}。$$

因为证明这 4 个式子并不复杂，加之限于篇幅，所以它们

的证明留给有兴趣的读者。

那么，阿基米德是从什么地方得到启示，采用割圆术求 π 的呢？这是一个谜。在他之前，古希腊数学家安提丰（约公元前 480～前 411）和布里森（约公元前 5 世纪），在研究“化圆为方”的问题时，曾分别采用圆的边数不断增加的内接和外切正多边形面积接近圆面积的方法。阿基米德很可能从中受到启发。

在阿基米德《圆的度量》中，还记有他研究圆的另外两项成果：①证明了圆的面积为 πR^2；②圆面积与其外切正方形面积之比——在 7.7 中称“圆方率”为 11∶14。这两项也是很了不起的成就。下面仅对 11∶14 加以分析。

首先，11∶14 是如何得来的？设想他取 $\pi=22/7$，于是 $\pi:4=(22/7):4=11:14$，其中 π 为单位圆面积，4 为它的外切正方形面积。由此就得到 11∶14。

其次，11∶14 与更准确的比值（3.141 593∶4）的相对误差，仅约 0.040 23%。由此可见，用 11 和 14 这两个“简单”的整数，就如此准确地勾勒出圆方率，这是很巧妙的。

第三，由 7.5 所说的最佳逼近理论可以断定，在两位数中，再也找不到比 14 更小的两个整数之比，能更准确地接近圆方率真值了。虽然多如牛毛的、比 14 更大的两个整数的比（如 355∶452），都比 11∶14 更接近圆方率真值，但这些整数都比 14 大得多。事实上，由最佳逼近理论可知，比 22/7 更接近 π 的由尽可能小的整数构成的数是 179/57（见 7.5）。此时的圆方率为 179∶228，与圆方率真值的相对误差约 0.039 53%，和上述 0.040 23% 差不多；而这 179 和 228 分别比 11 和 14 大得多。由此可以看出 11∶14 的优越性：比它“大十多倍”的

179:228 与圆方率真值的相对误差，竟和它相差无几。

第四，公元 97 年，意大利罗马建筑师弗朗丢斯（约 40～103），也用 22/7 作 π 值。他在研究了输水管道的截面积之后说：“正方形管道比与它相切的圆形管道的截面积大 3/11，或者说圆管道截面积比方管道小 3/14。”这里的 11 和 14，正是阿基米德的值。由此可见，时隔 300 多年的两次计算是如此之吻合，我们不能不说这是科学的“殊途同归”。

阿波罗尼奥斯（约公元前 260～前 190 或 170）是古希腊数学家，他以近乎完美的《圆锥曲线论》一书闻名于世。他还写了求圆面积的书《快速算出法》，用较好的方法改进了阿基米德的 π 值——据说改进为 3.1416。

此外，生活于公元前约 1 世纪的古希腊数学家海伦、中国祖冲之在 5 世纪中叶、印度婆罗摩笈多在 628 年、阿拉伯人花拉子米在约 825 年、迈蒙拉比在 12 世纪、坎帕纳斯在 1250～1260 年间将欧几里得的《几何原本》译成拉丁文并作补充和注释的时候，也都独立发现或采用过 22/7。罗马数学家坎帕纳斯（13 世纪），曾是乌尔班四世（Urban Ⅳ）在 1261～1264 年间任罗马教皇时的一个牧师。萨克斯索尼的主教阿尔伯特（1316～1390），在《圆的求积》一书中也写道：圆周和直径的比率正好是 22/7。1475 年，画家弗朗西斯卡（Piero della Francesca）出版了《论五种标准人体》一书，其中也提到 $\pi = 22/7$。1503 年，意大利（?）特拉贡伊斯姆斯（Tetragonismus）出版了一本名为《圆求方》的书，这本书中也使用 22/7 这个 π 值。此外，中国南宋数学家秦九韶在他的名著《数书九章》中引用的三个 π 值中也有 22/7。另外两个则是 3 和 $\sqrt{10}$。直到 1876 年第 15 期《自然》杂志上，英国卡里

克（Alick Carrick）还在《洞察圆面积的秘密》一文中，给出22/7这个π值。

1663年，日本人村松茂清（Muramatsu Shigekiyo）在《算术》一书中，说明用圆内接多边形求近似圆周长的方法，这虽不足为奇，但在日本却是一个创举。他虽然算出π的7位小数，但不知是否正确，因此只公布了3.14。日本数学家萨多色各（Sato Seiko）在他1666年出版的一本书中也用3.14作π值。这本书是日本第一部介绍中国古代解高次方程的方法等成果的数学著作。1683年，日本数学家奥田有益，也用到3.14。而此前1674年他的同胞古郡之政则用22/7和157/50的形式使用了3.14。

关于用割圆术求π的方法和阿基米德所求π值的界限，美国坦普尔著的《中国：发明与发现的国度——中国科学技术史精华》中译本第291页，有一段不恰当的叙述："古代数学家力图得到尽可能接近于精确π值的近似值，其方法之一就是作圆的内接正多边形。当正多边形的边数越来越多时，多边形的面积就越来越接近圆的面积。因为圆面积可以用πR^2表示，而圆的半径R是可以准确测出的，且用多边形面积近似于圆面积，即可求出π的近似值。阿基米德利用96边形，确定π的精确值界于3.140与3.142之间。"

这段话有以下六点失误。

第一，通过求圆的内接、外切正多边形的面积算π值是可以的，但阿基米德不是用这种方法，而是求圆的内接、外切正多边形的边长、周长来计算π值的。

第二，只算圆的内接正多边形面积，是不会得到"接近于精确π值的近似值"的，因为只能得到π值的下界。正确的做

法是，还应该算得圆的外切正多边形面积，或像刘徽那样算得“类齿轮盘”（见后面的图 5-11）的面积，才能界定 π 值的范围。

第三，只算圆的内接正多边形的面积，是不会得到准确 π 值的上下界的。认为阿基米德是这样得到“π 的精确值界于 3.140 与 3.142 之间”有误。事实上，阿基米德也不是这样得到 π 值的上下界的。

第四，阿基米德求得的 π 值界于 22/7 和 223/71 之间，即 $3.1408\cdots<\pi<3.1428\cdots$。这只能得到 $3.140<\pi<3.143$ 的结果，因为下界只能取不足近似值，上界只能取过剩近似值，因而“π 的精确值界于 3.140 与 3.142 之间”中的上界 3.142 应为 3.143。

第五，认为 R 是可以“准确测出的”，这是错误的。事实上，R 永远不可能准确测出。

第六，一方面在说算圆内接正多边形边数越来越多时的面积，一方面又在说 R 是可以“准确测出的”，这是又在“算”又在“测”来求 π 值。究竟是哪一种？可以看出，作者对割圆术或阿基米德是如何具体求得 π 值的叙述，是含混不清的。

以上失误，也是一些科普作品常见的失误。

此外，有人说阿基米德在《圆的度量》中，得到“圆周率的下限是 211 875/67 441（约为 3.1416），但这个值到底是谁算出来的？这个问题一直是数学史上的悬案。有人说是比阿基米德小 30 岁的同事，佩尔吉的阿波罗尼奥斯计算出来的；也有人说是阿基米德自己算出来的”。这里，211 875/67 441 = $3.1416\cdots>\pi$；所以，说它是“圆周率的下限”，显然不对。

2．“数学之神”——阿基米德

1842 年，数学史家内塞尔曼（1811～1881）首先在《希腊代数学》中，把代数学符号化的历史过程划分为三个阶段：（1）起于约 250 年丢番图（约 246～330）时代的“文字表示的数学”（完全不用符号），（2）和（3）分别为约 15 世纪的“简写的数学”和 16 世纪的“符号数学”。阿基米德在丢番图之前四五百年，当时计数方法是十分落后的，那时根本没有阿拉伯数字和其他现在的数学符号，只能用“文字”表示“数学”。因此，美国数学史家伊夫斯（Howard Eves）说：“我们不得不承认阿基米德是一个非常能干的计算者。”

在古希腊文明璀璨的满天繁星中，有一颗最耀眼的科学巨星——阿基米德（图 5-7）。用公元前 1 世纪对阿基米德狂热崇拜者的话来说，他是“数学之神”。例如，罗马时代意大利的博物学家大普林尼（23～79）在《自然史》一书中，就称阿基米德为“数学之神”。

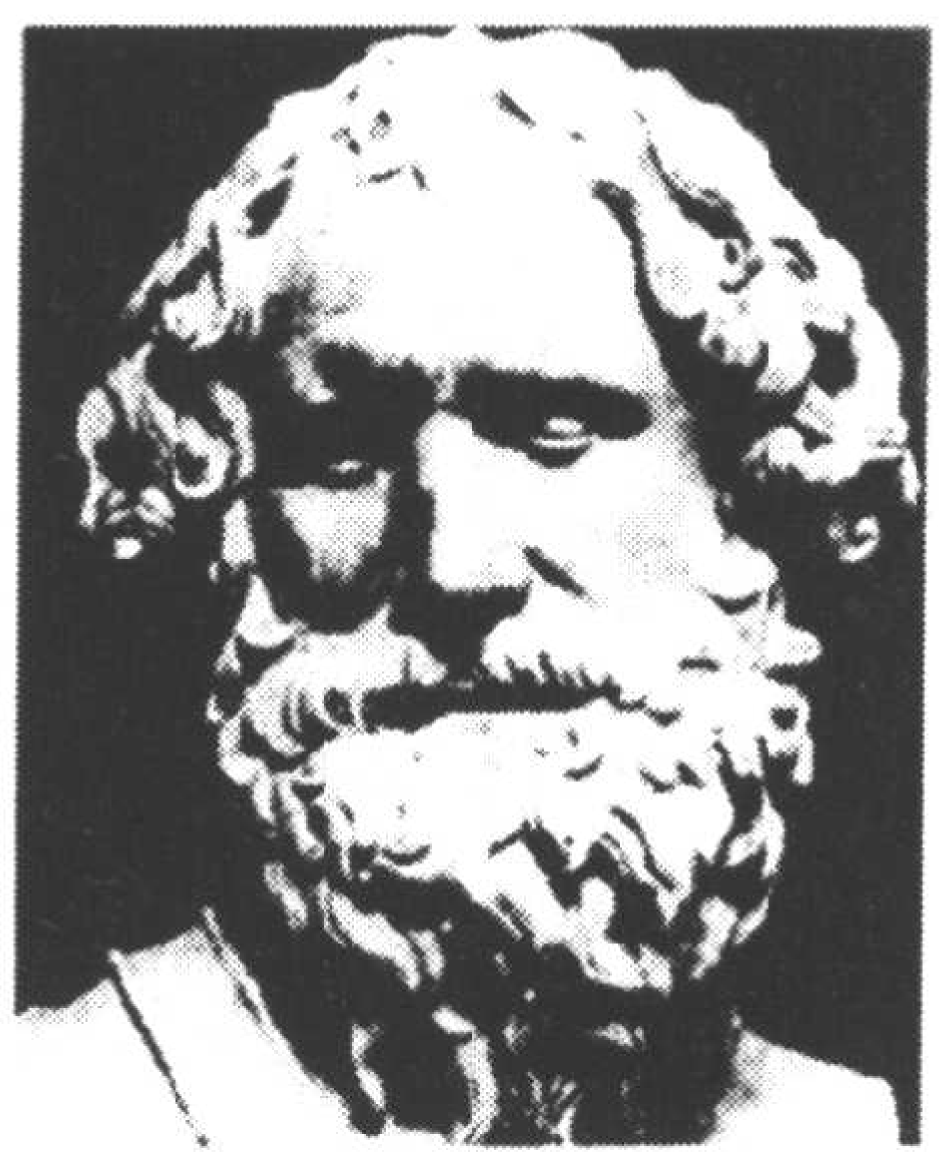


图 5-7　阿基米德

美国数学史家贝尔（1883～1960）在《数学人物》一书中称：“任何一张开列有史以来三个最伟大的数学家的名单中，必定包括阿基米德，而另外两位通常是牛顿和高斯。不过，以他们的宏伟业绩和所处的时代背景来比较，或拿他们影响当代和后世的深邃久远来比较，还应首推阿基米德。”

德国数学家莱布尼茨（1646～1716）也说："了解阿基米德和阿波罗尼奥斯的人，对后代杰出人物的成就，就不再那么钦佩了。"

阿基米德的一切都是人们津津乐道、永不枯竭的话题之源。

1998年10月30日，一卷被烤得变了色、散发着霉臭气味的书，在纽约克里斯蒂拍卖行以200万美元的天价拍卖。伦敦书商西蒙·芬奇代表一位不愿透露姓名的美国收藏家买下了这卷千年古书。卖者是在20世纪20年代初得到这卷书的一个法国家庭的成员。这卷书之所以价值连城，因为它是迄今保存的阿基米德重要数学著作最早的版本，其中载有他的《机械定理方法论》和《论浮体》两本书。前一本书提出的研究思想与现代微积分惊人地相似。后一本书中，有他著名的、至今仍载入中学物理课本的浮力定律。

阿基米德得意地发现，圆柱内切球的体积和表面积都分别是这圆柱的2/3，于是这个球柱相切的图形，按照他的遗嘱被刻在他的墓碑上。大约100年后的公元前75年，罗马著名的政治家、作家西塞罗（公元前106～前43），在西西里岛担任财务官去该岛东南的叙拉古收税的时候，去凭吊了这位伟人之墓。但没有人告诉他墓地在哪里，因为叙拉古人深知，正是罗马将军马塞拉斯（约公元前268～前208）带领的军队攻占叙拉古城，其部下将阿基米德杀害的。西塞罗只好亲率仆从用镰刀辟开杂草丛生的小径寻找，终于发现高出杂树不多的小圆柱形的墓碑，上面刻着那个图形。西塞罗还将这位他钦佩的"敌人"的墓地修整一新。但年长日久，几个世纪之后，随着城市的发展，这个古迹似乎永远消失了。然而，在历经约2000年沧桑之后的1965年，奇迹再现，人们终于在修建叙拉古的一

座饭店的时候，用铲土机挖地基时，碰到了这块墓碑……

往事如烟，叙拉古人终于如愿以偿地为这位空前绝后的伟人重建了茔墓。现在还有一个人工凿砌成的石窟，宽约 10 米，内壁长满了青苔，被说成是阿基米德之墓，但却没有任何能证明其真实性的标志了。

由于阿基米德还发现了图5-8的中央所表示的“阿基米德螺线”的美妙性质，所以他在螺线周围配上了一句含意深刻的哲学名言：“虽经沧桑，我仍将以故我出现。”并嘱咐将这句话刻在自己的墓碑上。这一名言是如此美妙，以至穿越了 20 个世纪的时空——雅格布·伯努利在发现对数螺线经过各种变换（例如渐伸线、渐屈线、回光线）之后，仍然成为对数螺线之时，欣喜不已，也仿效阿基米德，将上述名言刻在自己的墓碑上。这句名言的影响是这样久远，以至各家译文是如此之多：“纵使变化，依然故我”、“虽然改变了，我还是和原来一样”、“再生乃故我”、“尽管改变，我仍将再现”。

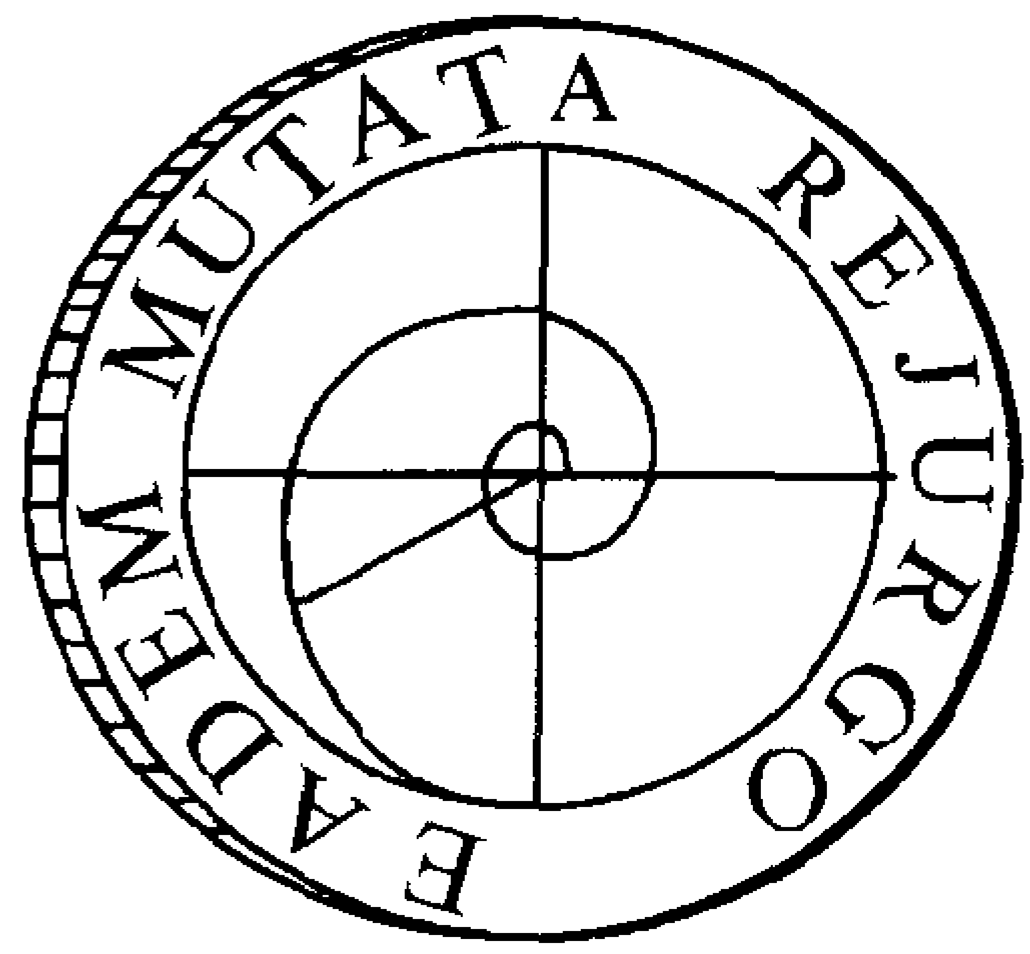


图 5-8

假定阿基米德真能再生，他会发现正如法国数学家柯西（1789～1857）所说：“人虽逝去，业绩永存”——他的“追星族”狂热依旧；这对科学来说，则是被证明了的普遍真理。

3. 编制弦表也得 π——托勒密的 3.141$\dot{6}$

大约 150 年，长期求学且居住在古希腊亚历山大里亚——

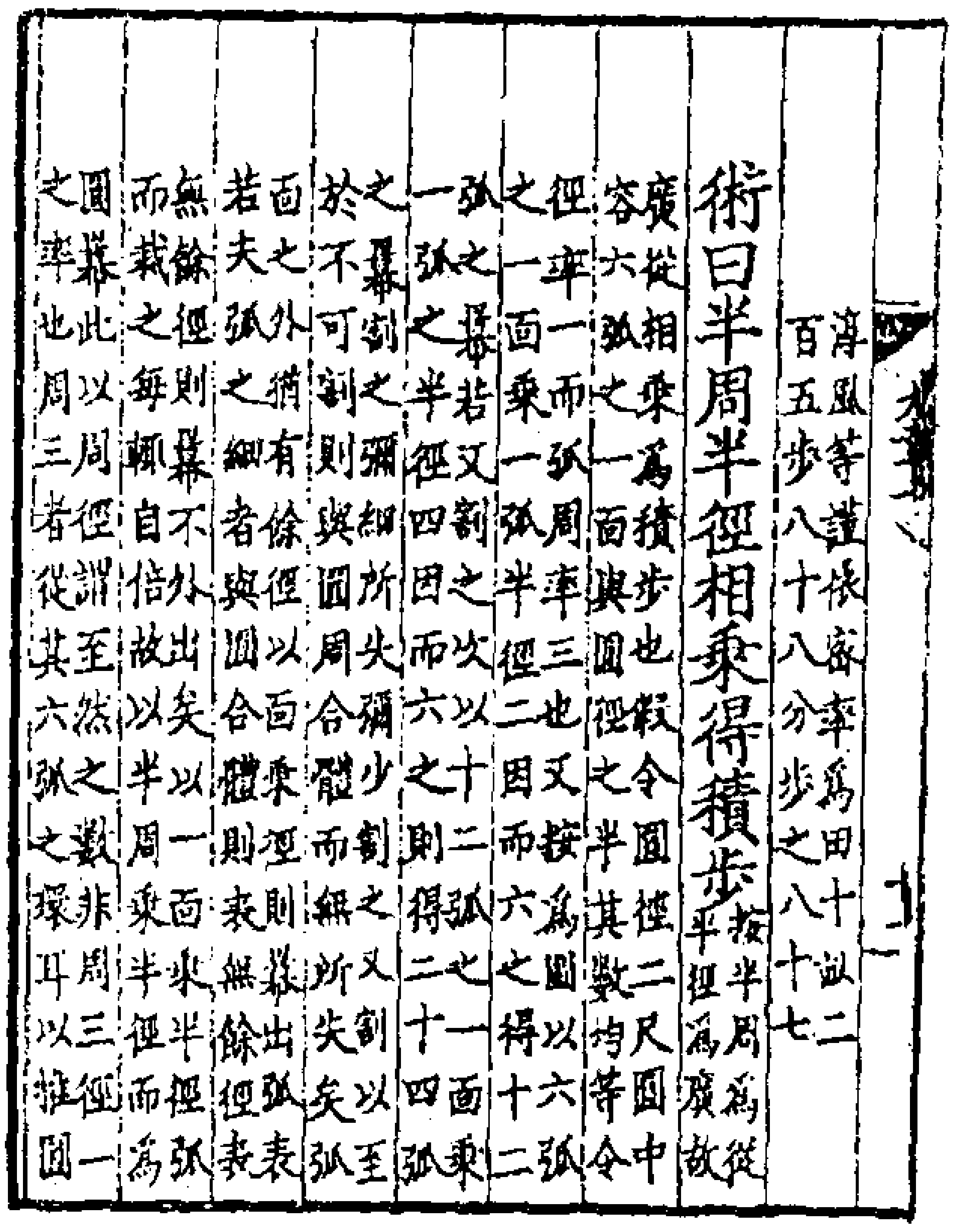
当时世界科学、文化中心，今属埃及的古希腊数学、天文学、地理学家托勒密（约 90～168），写了一本 13 卷的《数学汇编》。此书第一卷主要讲球面三角，其余 12 卷主要讲天文学。他在书中制作了一个弦表——正弦函数表的雏形。他以圆半径的 1/60 作为 1 个长度单位，把每 1 个单位（记作 1^P）又分为 60 分，把 1 分（记作 $1'$）又分为 60 秒（1 秒记作 $1''$）。由此，他算出圆心角 $1°$所对的弦长是 $1^P\,2'\,50''$，于是圆内接正 360 边形的周长与直径的比，就是 $(1^P\,2'\,50''\cdot 360):120^P$，即 $\pi = 3.8'30'' = 3 + (8/60) + (30/60^2) = 377/120$。就得到 $\pi = 3.141\dot{6}$。

托勒密另译为托来未、多禄某、波托雷梅。他的这个 π 值，比 3.14 几乎多了两位小数，被认为是“自阿基米德以来的巨大进步”。不过，有人说他的 π 值是“3.141 552”，而另有人则说他的 π 值是“211 872 /67 441 = 3.141 590 4…”，或“195 882/62 351 = 3.141 601 5…”；但都没有说明来源。

此外，前述印度的婆什迦罗，在大约 1150 年也给出 $\pi = 754/240 = 3.141\dot{6}$。

4. 刘徽也不示弱——改进割圆术得 3.1416 或 3.14

三国时代的魏晋数学家刘徽，发明了一种不同于阿基米德的割圆术——徽术。这载于他在 263 年开始注释的如图 5-9 所示的《九章算术·注》中。但他是如何具体算 π 的，却有不尽相同的说法。为了叙述方便，我们用 $R(=1)$、A 分别代表圆的半径和面积，a，p，S 分别代表圆内接正多边形的边长、周长、面积；T 代表圆外接正多边形的面积，n 代表这些正多边形的边数。



淳風等謹依密率爲田十畝二百五步八十八分步之八十七
術曰半周半徑相乘得積步按半周爲從半徑爲廣故從
廣從相乘爲積步也假令圓徑二尺圓中容六弧之一面與圓徑之半其數均等令
徑率一而弧周率三也又按爲圖以六弧之一面乘一弧半徑二因而六之得十二
弧之冪若又割之次以十二弧之一面乘一弧之半徑四因而六之則得二十四弧
之冪割之彌細所失彌少割之又割以至於不可割則與圓周合體而無所失矣弧
面之外猶有餘徑以面乘徑則冪出弧表若夫弧之細者與圓合體則表無餘徑表
無餘徑則冪不外出矣以一面乘半徑弧而裁之每輒自倍故以半周乘半徑而爲
圓冪此以周徑謂至然之數非周三徑一之率也周三者從其六弧之環耳以推圓

图 5-9

(1) 刘徽割圆得到 3.14 的三种说法和 3.1416 的两种方法。

第一种说法。说刘徽的算法分为三个步骤。

① 他算得圆内接正六边形的边长为 1，再由他用勾股定理证明的倍边公式 $a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}$，求得正 12，24，48，直至圆内接正 96 边形的边长 a_{96}。

② 由 $S_{2n}=nRa_n/2$ 求得 S_{96}，S_{192}的值。

③ 由"刘徽不等式"确定 π 的范围，进而求得他的 π 值 3.14。这里，"刘徽不等式"指 $S_{2n}<\pi<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$ 也可写作 $S_{2n}<\pi<S_{2n}+\Delta S$，可由刘徽原文译成的现代公式 $S_n<\pi<S_{2n}+2(S_{2n+1}-S_{2n})$推得。

以下将他得到的一系列数值列成表 5-1。

由表 5-1 的最后一行，可以看出他的 3.141 024<π<3.142 704。

表 5-1

圆内接正多边形边数 n	每边的长 a_n	周长 p_n	面积 S_{2n}	面积差 $S_{2n}-S_n$	$S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$
6	1.000 000	6.000 000			
12	0.517 638	6.211 656	3.000 000		
24	0.261 052	6.265 248	3.105 828	0.105 828	3.211 656
48	0.130 806	6.278 688	3.132 624	0.026 796	3.159 420
96	0.065 438	6.282 048	3.139 344	0.006 720	3.146 064
192			3.141 024	0.001 680	3.142 704

那么，刘徽又是根据什么由 3.141 024<π<3.142 704 来确定 3.14 的呢？

原来，由此式可明显看出小数点后第三位已出现差异，因而是不可靠的，可靠的只有 3.14。于是，刘徽便按四舍五入法取不足近似值，得到 3.14。刘徽又由 $S_{2n}<\pi<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$ 和上述不等式判定“此率尚微少”，即 3.14 是不足近似值。

第二种说法是，刘徽用割圆术求出半径为 10 寸的圆内接正 192 边形面积 314 寸^2 之后，代入准确的圆面积公式 $A=\pi R^2$，就得到 $\pi=3.14$。

但是，郭书春（1941～　）对上述两种说法持有异议。他认为，刘徽首先用无穷小分割法和极限思想，证明了《九章》中圆内接正 n 边形的面积公式即圆面积公式 $S_n=A=p_nR/2$——“半周半径相乘得积步”，这一公式是割圆术的主旨。再用同样的割圆程序求出半径为 10 寸的圆的内接正 192

边形面积 314 寸^2 之后，代入上述公式得近似圆周长 $p_n = 62.8$ 寸，最后再与直径 20 寸相比，便得到近似的 $\pi = 3.14$。他还指出上述第二种说法的失误在于，刘徽在求 π 时，尚未证明准确圆面积公式 $A = \pi R^2$，因而不可能用它求 π。这是第三种说法。

以上三种说法是得到 3.14，而得到 3.1416 的两种方法见 11.5。

(2) 刘徽与阿基米德工作的比较。有人从阿基米德的方法去想像刘徽的方法，觉得阿基米德用圆内接和外切正多边形的边长两面夹的方法，比刘徽只用圆内接正多边形面积“割圆”的方法好些。但实际情况并不是这样。刘徽虽然只算 S_n，S_{2n} 而不算 T_n，T_{2n}，但他不是简单地从一面去接近圆，而是如下所述，用一面接近圆起到两面夹的效果。

图 5-10 中的 AB 为 a_n，C 为弧 AB 的中点，则弦 AC，BC（都没有画出）分别为 a_{2n}。因此，$S_{2n} - S_n = nS_{\triangle ACB}$。矩形 $ABED$ 的 DE 边与弧 AB 相切于 C，则 $\triangle ADC$ 与 $\triangle BEC$ 面积之和等于 $\triangle ACB$。于是有 $S_{2n} - S_n = nS_{\triangle ADC + \triangle BEC}$。又由于五边形 $OADEB$ 盖住了圆扇形 $OACB$，因此 n 个这样的五边形必然盖住圆面，即 $\pi < S_{2n} + nS_{\triangle ADC + \triangle BEC} = S_{2n} + (S_{2n} - S_n)$。又因为 $S_{2n} < \pi$，于是前述 $S_{2n} < \pi < S_{2n} + (S_{2n} - S_n)$ 得以证明。所以圆面积 πR^2 为 π。

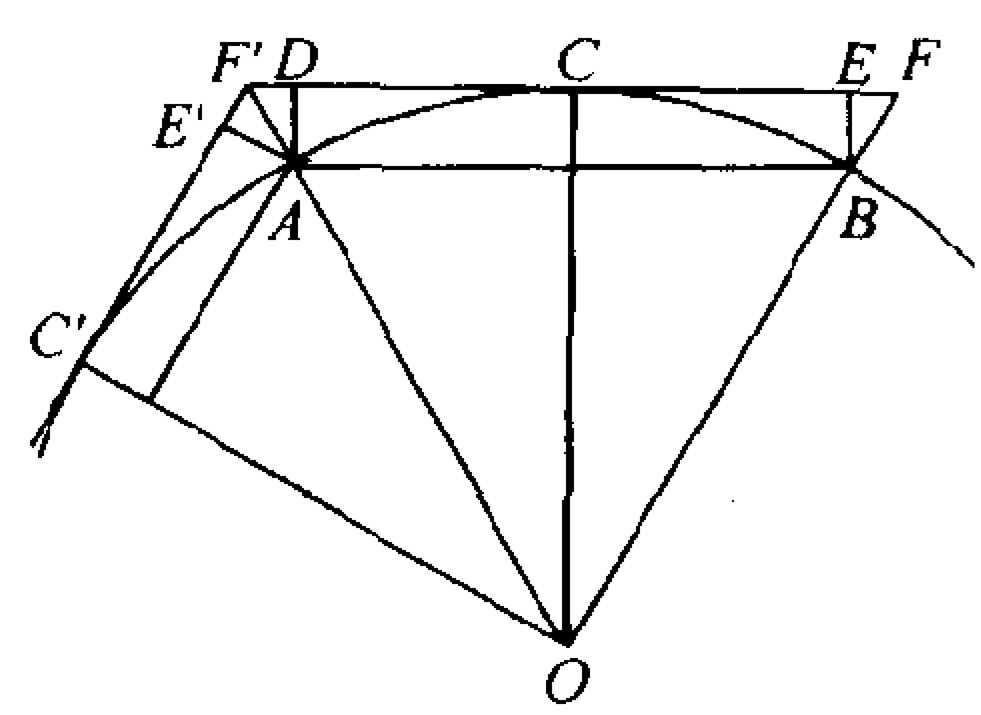


图 5-10

古代称弧与弦的中点间的线段为“矢”。由图 5-10 可见，

刘徽也用到矢，所以一些文献称刘徽的割圆术为“弧矢割圆术”。

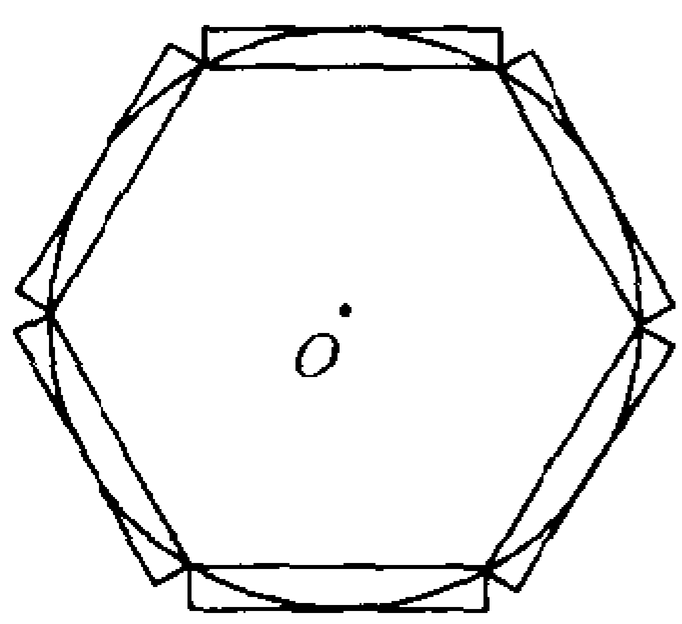


图 5-11

由图 5-10 也可以明显看出，四边形 $E'F'DA$ 被刘徽从圆的外切正多边形中除去。剩下的图形（图 5-11）被称为“类齿轮盘”。这样，$S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$比相同 $2n$ 边的外切正多边形的面积要少 n 个小四边形，所以在计算同样多的边数时，刘徽法得到的 π 值上下限（分别为 3.142 704，3.141 024），都分别比阿基米德法得到的 π 值上下限（分别为 3.142 857, 3.141 845, 准确些：3.142 704<3.142 857, 3.141 024>3.141 845。

这里，阿基米德的 3.142 857，3.141 845 则分别由 22/7 和 223/71 算出。这是刘徽法比阿基米德法更先进的第一点。

第二，刘徽法不必计算 T_{2n}（这对应于阿基米德计算外切正多边形周长），所以计算程序更简便，工作量少一些。

第三，虽然这两个人都是用两面夹的方法来确定 π 值的范围，但不难看出，刘徽法比阿基米德法更机智巧妙。

但是，阿基米德法只算周长，不算面积，刘徽法既要算边长，又要算面积；显然前者思路显得简明，后者显得繁杂，因而这是阿基米德方法的第一个优势。不过，刘徽的繁杂也正好是其进步之处：仅仅一次繁杂的思路取代简单的思路之后，使工作量减少并得到更准确的结果。这是刘徽法的第四个先进之处。

此外，我们注意到阿基米德比刘徽早约四五百年，也就是说，取得相同的成果 3.14，阿基米德远远走在时间前面。这

是阿基米德法的第二个优势。

不但如此，刘徽时代使用的是中国先进的位值制记数法，连乘方、开方都能迅速完成。而阿基米德时代使用的是古希腊落后的字母记数法，可见阿基米德的工作要困难得多。克服更大的困难得到同样的结果，这是阿基米德工作的不凡之处，也是第三个优势。

这里，我们有必要对前述3.1416和3.14加以说明。怎么一会儿是3.1416，一会儿又是3.14了呢？这将留在11.4讨论。说3.1416和说3.14仅仅是为了叙述方便：3.1416应排在$3.141\dot{6}$之后，而3.14则是与阿基米德的工作相比较。

（3）刘徽割圆的意义。刘徽不但求得准确到小数点后两位的π值3.14，而且把它用于实际计算。例如，《隋书·卷十六》嘉量条有“刘徽注《九章算术·商》曰：当今大司农斛圆径一尺三寸五分五厘，深一尺，积一千四百四十一寸十分（寸）之三”。这段话翻译成算式，就是斛的体积是$3.14\cdot(13.55/2)^2\cdot 10=1411.279\,625$(寸^3)，即约1411.3寸^3。理论与实践结合是科学家追求的目标之一，也是体现科学成果和科学家价值的重要方面。

对于刘徽割圆术的其他意义，数学家们说“含有原始的极限思想”、“含有积分学思想的萌芽”、“创造了无穷小分割法”、“创造出算π的正确方法”，哲学家们说体现了化曲为直、直曲转化的哲理。这些看法无疑是正确的。但是，以上看法却没有完全指出刘徽割圆术的独特之处。刘徽割圆术的独特之处在于，它的主旨是证明“半周半径相乘得积步”，即证明了圆的面积公式是$A=Rp_n/2$——当n无限增多时$p_n/2$即“半周”。即他将圆分成无穷多个以圆内接正多边形每边为底，以圆心为

顶点的等腰三角形（所谓“觚而裁之”），而圆面积就是这些小三角形面积之和。也就是说，他已经用正确的方法得到正确的圆面积公式了。关于这点，郭书春谈到了。虽然圆面积公式阿基米德早已得到，但刘徽却是独立得到的。由此可见，刘徽是中国数学史上首先运用极限思想成功地解决具体问题的人。

（4）得到 3.1416 的不止刘徽一个，但都比刘徽晚。例如，图 5-12 就是印度阿耶波多在 499 年著的《阿耶波多历数书》中，给出的 62 832/20 000 = 3.1416。

चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम् ।
अयुतद्वयविष्कम्भस्यासन्नो वृत्तपरिणाहः ॥

图 5-12　阿耶波多的圆周率

但有人却说，这个值是 530 年得到的，并指出：“不知道他的这一结果是怎样得来的。这可能是来自某个较早的古希腊材料，也可能是计算内接正 384 边形周长的结果。”舍普勒写的《π 的年表》也说，是通过计算正 384 边形周长得到的，但时间却是 500 年。另有人说“在 3，4，5 世纪，中印交往频繁，有理由相信某些科学知识会流传到印度去。从时间上看，阿耶波多比祖冲之晚 47 年，比刘徽晚两个多世纪，很有借鉴的可能。”

又如，婆什迦罗在 1150 年的《丽拉瓦提》中写道：“直径乘以 3927 除以 1250 所得的商是密率；而直径乘以 22 除以 7 为粗率或实用率。”即 $\pi = 3927/1250 = 3.1416$ 和 $\pi = 22/7$。这也是某些科学知识可能是由中国传到印度去的佐证。不过，这里的“密率”并不是指祖冲之的密率 355/113。

在大约 800 年，前述阿拉伯花拉子米也得到过 3.1416。

1460年，波尔巴赫（1423～1461）也得到 $\pi=62\ 832/20\ 000=3.1416$，但公开却是在他英年早逝之后的1541年。这位奥地利数学家师从德国的德·库萨·尼古拉斯，对天文、三角学有很高的造诣，大约1450年成为维也纳大学的首批教授之一，德国著名数学家约翰·穆勒也是他的学生。

此外，清代数学家王锡阐（1628～1682），在1651年著的《晓庵新法》中也取 $\pi=3.1416$，日本数学家礒村吉德在1683年也用过3.1416。

5. 祖冲之领先1000年——355/113，$3.141\ 592\ 6<\pi<3.141\ 592\ 7$

中国南北朝时南朝的科学家、数学家祖冲之（429～500），在宋大明六年即462年上表论历。在这之前几年，他和他的儿子祖暅（5～6世纪）写了一本叫《缀术》的书。书中载有他得到的密率355/113，"正数"的盈朒二界即 $3.141\ 592\ 6<\pi<3.1415927$，约率22/7这三个算π成果。在这一节，只叙述"355/113"和"评价祖冲之的算π成就"的有关问题。而其他重要问题，将在后面分别叙述。

（1）355/113的精确度及相关的问题。355/113展开成小数的值是3.141 592 920 3…，其小数循环节为 $113-1=112$ 位。显然，它只与π值的前6位小数吻合。但一些人的叙述有误。例如，美国坦普尔著《中国：发明与发现的国度——中国科学技术史精华》中译本第291页说："数学家祖冲之父子求得的圆周'密率'为3.141 592 920 3，达10位小数（据《隋书·律历志》记载，祖氏的'密率'为355/113，精确到六位小数，相当于算出：$3.141\ 592\ 6<\pi<3.1415927$——译者

注)。”这段原话有以下两个主要失误。

一是祖冲之的密率不是“3.141 592 920 3”，而是“355/113”，其精确度不是“10 位小数”，而是 6 位小数。可能有人会说，“3.141 592 920 3”就是“355/113”的约值，因而两者并无本质不同。其实不然，因为这里取到 10 位小数毫无价值——它既不能说明祖冲之的密率准确到 10 位小数，也不能代表 355/113 的一个完整的循环节。

二是 355/113 并不“相当于算出：3.141 592 6 < π < 3.141 592 7”。首先，算出某个值的约值与确定某个值的范围并不相当；其次，即使我们把 355/113 强行“相当”一下，则只有以下可能：3 < π < 4, 3.1 < π < 3.2, …, 3.141 592 < π < 3.141 593, 3.141 592 9 < π < 3.141 593 0…。可见，怎么也不能“相当于算出：3.141 592 6 < π < 3.141 592 7”。这本书之所以误把 355/113“相当于”3.141 592 6 < π < 3.141 592 7，是把祖冲之算 π 的成就 355/113 与 3.141 592 6 < π < 3.1415927 混为一谈了。

(2) 如何评价祖冲之的算 π 成就。

首先，他求出 π 的 8 位准确值，不但当时最准，而且保持了世界纪录近 1000 年。直到 1424（或 1427 或 1430）年才由中亚的阿尔·卡西（? ～1429 或 1436）以 17 位准确 π 值打破。而他的密率，则直到 1573 年才由德国马德堡（或荷兰）的数学家奥托，和出生在梅兹（属法国或德国）后移居荷兰的安托尼兹于 1585 年（或以后）重新发现。

奥托和安托尼兹是如何发现 355/113 的？德国人库茨（1837～1903）研究后得知，奥托在 1573 年早于安托尼兹得到 355/113，可能是从 22/7 和托勒密的 377/120 两者“折中”——分子分母各自相减得到的。奥托是德国数学家莱伊提

库斯（1514～1574 或 1576）的学生，他在 1596 年最终完成了这位老师生前未编完的、每隔 10″的三角函数表。而安托尼兹的方法，则由他的儿子在 1625 年发表他父亲发现的 355/113 时予以说明——先用阿基米德法求出 336/106＜π＜377/120，然后取分子分母各自的算术平均值。

此外，日本数学家古郡之政在 1674 年也使用过 355/113。另一个日本数学家关孝和（约 1642～1708）在 17 世纪末也发现了密率。关孝和用的则是调日法：从 3 和 4 开始，累用调日法多次，即由(3·97＋4·16)/(1·97＋1·16)得到 355/113。

由此可见，祖冲之的密率领先了世界 1000 多年。

第二，祖冲之用 355/113 作密率具有创造性，简单易记，准确、有趣。这些，不但在数学史上是长盛不衰的美谈佳话，而且与许多成果密切相关。下面举例说明。

阿基米德虽然得知 223/71＜22/7，但 223/71 却并不是 π 的一系列渐近分数中的某一个。而祖冲之的 355/113 的创造性恰好就在这点——它是 π 的最佳渐近分数中较简单准确的一个：虽然 π 的另一个渐近分数 333/106 的“简单程度”与它差不多，但与 π 的绝对误差却约是它的 312 倍；而绝对误差仅比它约小 0.2% 的 π 的另一渐近分数 52 163 / 16 604，却比它“复杂”得多。可见阿基米德没能像祖冲之那样“更上层楼”。同样是数字 1，2，3，…的“差之毫厘”的不同“组合”，就“相去天渊”，我们再次体会到了数学的无穷奥妙！

355/113 便于记忆是显而易见的。将最小的三个奇数 1，3，5 各重复一次后“平均”斩为两段。再让大的“住楼上”，小的“住楼下”就行了。有趣的巧合是，它的分子和分母，都可以用完全平方数简单地表示出来：$355/113=(7^2+9^2+$

$15^2)/(7^2+8^2)$。更有趣的巧合是 7，8，9 是连续的自然数，而 $7+8=15$!

355/113 的准确程度，可从以下实例看出。假设一个圆的直径是 10km，用它算出的圆周长比真值大不到 3mm! 事实上，355/113 与 π 的真值的相对误差仅约 $9/10^8$。

祖冲之逝去 1500 多年了，也许后来的许多人还不知道他的英名，但他的 355/113 却长久被人关注。例如，生于十三四世纪元代的数学家赵友钦，在他五卷本《革象新书》第 5 卷《乾象周髀（法)》篇中，在叙述了历代各家所取用的 π 值 3，22/7，157/50，355/113 等之后，认为“圆径一尺而周围三尺，则三尺尚有余，围三尺而中径一尺为不足，盖围三尺径一尺是六角田也”，“径一百一十三而周围三百五十五最为精，求日周天径是此法也”。同时，还认为 355/113 这个值“至当不可易”，并在书中用这个值进行计算。他是经过如下计算后认为 355/113 是“最精”的。在图 5-13 的圆内作一正方形（只画出两边 AB，AE）内接于圆，设圆的直径为 10 丈，经过 12 次将正方形倍边后得圆内接正 $4\cdot2^{12}=16\ 384$ 边形，求得它的周长为“3141 寸 5 分 9 厘 2 毫有奇”。由此就得到 $\pi=3.141\ 592+$ 。

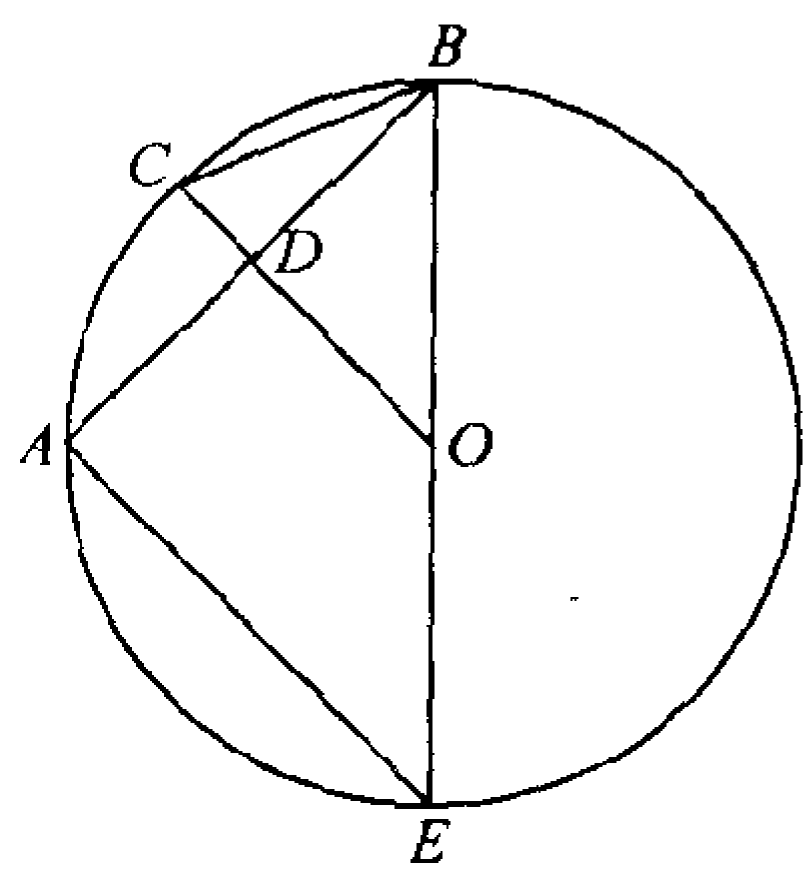


图 5-13

赵友钦将 3.141 592+ 取不足近似值 3.141 592 乘以 113，得到 354.999 89，再取其最接近的整数 355，就得到 = 355/113。由于 355 是 354.999 89 的过剩近似值，正好“弥补”了刚才

3.141 592+舍去的那点，所以取355也是合理的。他的具体算法如图5-13。直径 $BE=d$，AB 既是刚开始圆内接正方形的一边，也同时代表倍边后圆内接正多边形的一边。因 $OC\perp AB$ 且交 AB 和圆于 D，C，显然 BC 必为⊙O 内接正 $2n$ 边形的一边。设 $AB=a$，则 $AE=\sqrt{d^2-a^2}$。而 $CD=OC-OD$，即 $CD=OC-AE/2$，由此得出 $CD=(d/2)-\sqrt{d^2-a^2}/2=(d-\sqrt{d^2-a^2})/2$。这样，在直角三角形 BCD 中，就可以求得 $BC=\sqrt{DC^2+BD^2}=\sqrt{\left(\frac{d-\sqrt{d^2-a^2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$。

赵友钦就是通过这个公式，一次次由圆内接正 n 边形边长求得 $2n$ 边形的边长，最终求得16 384边形周长的。

有人说："（赵友钦）所列出的：赤道周天（为）365.2575，中径（为）116.2651，是按π取355/113入算的，这是一个过剩近似值，但他未能指明。"这是赵的小缺点。因为 $365.2575/116.2651=3.141\ 591\ 9<\pi$，这与 $355/113>\pi$ 是互相矛盾的。如上述"365.2575"改为"365.2576"，则有 $365.2576/116.2651=3.141\ 592\ 7$，这个值就大于π，而且更接近于355/113。事实上，他求π用的是圆内接正多边形，只会得到π的不足近似值，而没有像刘徽得3.14时那样明确指出"此率尚微少"。

那为什么赵友钦要在祖冲之之后约1000年再来研究π值呢？原来，郭守敬等人在利用沈括的"会圆术"和 $\pi=3$ 进行有关计算，编制《授时历》、推算赤道积度和赤道内外度的时候，虽然方法是全新的、正确的，但因位反复使用近似公式和 $\pi=3$，致使周天直径、太阳赤经、赤纬误差较大。赵友钦再次算π，正是为了驳正《授时历》的这些缺点。

第三，祖冲之研究π的前述成果，还标志着中国数学在当时的领先地位——不仅仅是算π领先。为什么阿基米德早于刘徽几百年就得到类似的结果，而其后古希腊数学却没重大进展呢？而中国在刘徽、祖冲之时代却呈现数学的繁荣、跃进的局面呢？梅荣照认为主要有以下三个因素：一是刘徽法比阿基米德法简捷，二是中国的筹算比古希腊的算法优越，三是刘徽以后有祖冲之父子这样出色的继承者。李约瑟也在《中国科学技术史·卷3》226页指出："在这个时期，中国人不仅赶上了希腊人，并且在公元五世纪祖冲之和他的儿子祖暅的计算中又出现了跃进，从而使他们领先了一千年。"由上可见，先进的筹算和杰出的人才一旦采用了科学的、先进的方法，不仅算π成就辉煌，而且数学也会领先。不但如此，联系到祖冲之和他同时代人的其他科学成就，看到当时科学的繁荣、发达，也就不足为奇了。

6. 享誉世界的科学巨匠——"云中之鹤"祖冲之

"上联是'孙行者'，请对下联。"答案是"祖冲之"。

"爷爷洗淋浴，猜一中国古代科学家。"答案也是"祖冲之"。

这是某联欢会中的一幕。由此可见，直到今天，祖冲之依然是我们心中的科技明星。

祖冲之（图5-14）是中国古代一位涉猎广泛、成就卓著的杰出人物。除了卓越的数学成就之外，他在天文方面创立了中国古代的优秀历法之



图5-14 祖冲之

一——《大明历》；他在机械设计方面仿制了指南车、创制了水碓磨、千里船等；他精通音律；他注释了许多经典，写过文学作品《述异记》10卷；等等。因此，近现代中外都认为他是一颗璀璨的科技巨星。

在中国，1955年就发行了包括祖冲之在内的“四大文化名人”的纪念邮票（另外三位是张衡、一行（683或673～727）、李时珍（1518～1593））。南京紫金山天文台1977年决定，将1966年11月9日由该台发现的1888号小行星命名为“祖冲之星”，得到国际天文学联合会批准。2000年10月10日，在祖冲之的故里河北省涞水县的祖冲之中学，召开了“纪念祖冲之逝世1500周年学术讨论会”，中外学者80多人到会。出席研讨会的中国科学院院士吴文俊、席泽宗等为新落成的祖冲之纪念馆揭了幕。

在国际上，1959年11月4日苏联用“月球3号”火箭首次拍下月球背面的照片后，国际天文学联合会就将位于月球东经148°，北纬17°的一座环形山，命名为“祖冲之山”。巴黎“发现宫”科学博物馆的墙壁上著文介绍了祖冲之求得的圆周率。莫斯科大学内排列的世界上最著名的科学家塑像中有祖冲之铜像，大学礼堂的走廊上镶嵌有祖冲之的大理石塑像。至于为他作传、作画者更是不计其数，例如，美国历史学家吉利斯皮（C.C.Gillispie）编撰的《科学家大辞典》，就为他立了传。

可见，由于祖冲之在世界科技史上的巨大成就，使他的世界名人地位为国际公认，得到了很高的荣誉。这正如茅以升在1917年写的《中国圆周率略史》一文中所说，祖冲之的π值真是“精丽罕俦，千古独绝，皎皎不群，如云中之鹤”。当然，他的其他成就也如巨龙腾飞。

7. 明清停滞——发人深省

遗憾的是，后来中国学者们对祖冲之算π的成就却没有继续研究、发展，出现了元代中叶以后这个方面甚至整个数学开始落后的局面，以至引出 5.1 的 3 所说的纳林的无知。

对明代的落后，钱宝琮说过："算学较前代退化，算式涉周率者，都墨守旧率 3，或 22/7。对于周率研究，非特不能得其真旨，一二好奇之士，且各逞臆说妄创新率。朱载堉以π为 $\sqrt{2}/0.45$，邢云路谓 $\pi=3.126$，又 $\pi=3.121\,320\,34$，陈荩谟谓 $\pi=3.152\,05$，方以智谓 $\pi=52/17$，及程大位《算法统宗》所载'智率' 25/8。诸率于数十年之间（1540～1590）光怪陆离，先后发现，可见明儒之浅陋矣。"



图 5-15　徐光启

明代（1368～1644）万历年间（1573～1620）和以后，西方传教士大批来华。例如意大利人利马窦（1552～1610）于 1582 年，意大利人艾儒略（1582～1649）于 1613 年，瑞士（一说德国）人邓玉函（1576～1630）于 1621 年，德国人汤若望（1591～1666）于 1622 年来华。这样，才有大约在 1606 年秋至次年春，明朝大臣徐光启（1562～1633）（图 5-15）和利马窦完成前 6 卷欧几里得《几何原本》的译稿，后 9 卷由英国人伟烈亚力（1815～1887）和李善兰在 1857 年共同译完。才有徐光启、李天经（1579～1659）等人，提倡西法

历算、共同撰写《历书》137卷的举动。这样，这种落后状况才开始改变。

在清代，情况也差不多。顺治三年即1646年，波兰人穆尼阁（1611～1656）来华。顺治十五年即1659年，比利时人南怀仁（1623～1688）来华。受法皇路易十四（1638～1715）即路易大王的委派，法国白晋——中文名白进（1656～1730或1732）和张诚（中文名，1654～1707）在康熙二十五年即1687年来华。在这种背景下，张诚、白进当上了康熙的老师，南怀仁、汤若望等被清廷聘用。南怀仁、汤若望还分别参与编纂《数理精蕴》和掌管钦天监工作。他们带来了西方的割圆术，此时中国学者才开始接受西方传来的科学，使中国的割圆术等研究进入新的阶段，数学闭塞落后的状况才多少有些改观。

西方的割圆术最早传入中国，是在明末。《测量全义·卷五》"圆面求积"中，介绍了阿基米德的结果，有所谓"今士法"，记有π的上下界都在小数点后20位，但没有证明。据李俨说，"今士"就是Van den Cirkel或Ludolf van Ceulen（鲁道夫）。此外，《数理精蕴·下》第二篇的卷十五，由圆内接、外切正多边形也求得π的20位小数，但计算时只取了3.141 592 65。

π=3.141 592 653 589 793 238 462 643 186 367 472 279 514，是19世纪清代秀水数学家朱鸿算得的，但后15位都错了，所以他只得到25位准确π值，显然在当时也不先进。在1820年，他被任命为湖南粮储道，因与巡抚不和，改任候补道。这位"精于数学，能融贯中西数学"的学者尚且如此，当时数学的落后就可见一斑了。

中国原来领先的数学在元、明以后开始落伍的原因很多，

其中不思进取、夜郎自大、闭关锁国、盲目排外的失误，最终导致清代割地赔款、丧权辱国，令人警省。

拿破仑曾经说过："数学的进步和完善与国家的兴旺是密切关联的。"此话不无道理。

8. 11位和16位——尼拉堪塔和罗曼的π值

在十五六世纪，印度数学家尼拉堪塔曾算出π=3.141 592 653 6，得到11位准确值。

1593年，罗曼（1561～1615，即范·罗曼或罗曼纽斯）应用古典割圆术，通过计算圆的正$2^{30}=1\ 073\ 741\ 824$边形，将π算至小数点后17位，其中小数点后15位正确。在16世纪，荷兰、比利时这些"低地国"的版图与现在并不一致：当时，现在比利时的一部分例如布鲁日就属于荷兰。因此，说他是比利时人或荷兰人都对。准确地说，他是荷兰或尼德兰安特卫普的人。荷兰和尼德兰的联系和区别见11.2。

9. 17位π值——阿尔·卡西惊天下

大约在1424年，出生在卡尚——今伊朗德黑兰以南约200公里的阿拉伯数学、天文学家阿尔·卡西，算出了18位π值3.141 592 653 589 793 2…，但只有前17位正确。这不但打破了祖冲之保持了近千年的算π世界纪录，而且使晚于他的前述尼拉堪塔、罗曼和后面要说的韦达（1504～1603）、惠更斯等人的算π成果黯然失色。

阿尔·卡西的成果，发表在他1424（或1427或1430）年著的《圆周论》中。他是算出圆的正内接和正外切$3\cdot 2^{38}=805\ 306\ 368$边形周长，来求得π值的。虽然他用的原理与阿

基米德的基本相同，但在计算中却采用了下述更为巧妙的、异于阿基米德的方法。

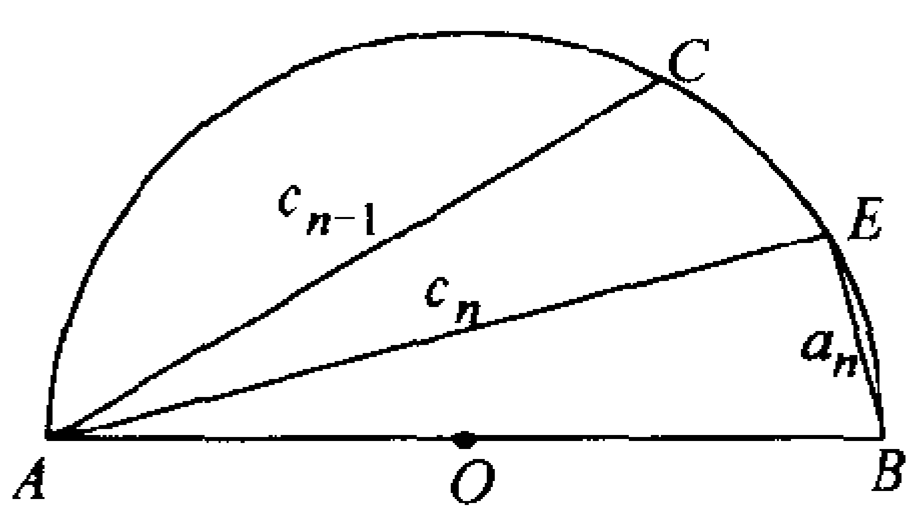


图 5-16

阿尔·卡西首先在图 5-16 中半径 $R=60$ 的圆内，定义弦的序列 c_1，c_2，…，c_n，……的值，而它们所对的弧依次为 120°，150°，165°，…，其通式为 $180°-60°\cdot 2^{1-n}$。直径 AB 的长是 D，E 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点。他依据的是 $AE^2=AB(AB+AC)/2$。这个式子，用 c_n 和 R 来表示，就是 $c_n=\sqrt{R\ (2R-c_{n-1})}$。显然，容易算得每一边的长 $a_n=\sqrt{D^2-c_n^2}$。由此，进一步算得圆内接正 $3\cdot 2^n$ 边形的周长。类似，可以算得圆外切正 $3\cdot 2^n$ 边形的周长。

具体计算的时候，阿尔·卡西造出了 28 个大的表格，并依次计算了 $n=1$，2，…，28 时的结果。此时取 $D=2$，就有 $c_{28}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$，这就得到 $a_{28}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$。用 a_{28} 之长乘以边数 $3\cdot 2^{28}$，就得到圆内接正 $3\cdot 2^{28}$ 边形的周长。他用同样的方法算了圆的正外切 $3\cdot 2^{28}$ 边形的周长。用 P_{28} 和 p_{28} 分别代表这个圆的正外切和正内接 $3\cdot 2^{28}$ 边形的周长，那它们的算术平均值 $(P_{2n}+p_{2n})/2$，这就是阿尔·卡西算得的圆的近似周长。

最后，他借用 60 进制角度的表示法，就得到

$$2\pi=6°16'59''28^{\text{iii}}1^{\text{iv}}34^{\text{v}}51^{\text{vi}}46^{\text{vii}}14^{\text{viii}}50^{\text{ix}}$$

这里，“6°”表示整数，后面是 60 进制分数。他在《圆周论》

的第 8 节中，又把这个值折合成 10 进制，就是

$$2\pi=6.283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$$

进而得出 $\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 25\cdots$。它的误差是$(P_{28}-p_{28})/p_{28}=(2R-c_{28})/c_{28}$。

阿尔·卡西的这个 π 值，一般认为是在阿拉伯数学中第一次出现的小数。因此，这位当时世界上最大的天文台——撒马尔干天文台的主要创始人之一，就成了除中国人以外第一个使用小数的人。当然，此前 5 个世纪的阿拉伯人 I．乌格利迪西(al-Uqlīdisī，952 年前后活动在大马士革)，已经认识到小数的重要性，并在他的书中使用，但没有被大家接受。所以，一般人认为中国以外系统介绍小数的第一人，就是阿尔·卡西。

1712 年，日本数学家关孝和也发现 π 的 16 位正确值，但距离阿尔·卡西时代已接近 3 个世纪了。

10．从 10 位到 18 位——韦达也来凑“热闹”

1579 年，法国数学家韦达在《数学定律，应用于三角形》中，用阿基米德的割圆术原理，通过计算圆的正 $6\cdot 2^{16}=393\ 216$边形，得出 $3.141\ 592\ 653\ 5<\pi<3.141\ 592\ 653\ 7$。从而得到 10 位准确值$=3.141\ 592\ 653$。虽然他的这一成果并不先进，但他是通过三角函数求出的一个有趣的恒等式——“无穷乘积”

$$2/\pi=\cos(90°/2)\cdot\cos(90°/4)\cdot\cos(90°/8)\cdot\ \cdots$$

$$=\sqrt{1/2}\cdot\sqrt{1/2+(1/2)\sqrt{1/2}}\cdot\sqrt{1/2+(1/2)\sqrt{1/2+(1/2)\sqrt{1/2}}}\cdots$$

来计算的。它被不同的人分别称为有史以来的第一个有关 π 的“分析表达式”、“分解表达式”、“无穷乘积表达式”。

韦达不但坚持利用这一表达式算 π，而且用分析式和无穷

乘积刻画π，给数学家们指出了一个崭新的计算、研究π方向，使π第一次从“形”——几何的“枷锁”中摆脱出来，进入“数”——几何以外的其他数学领域。

1593年，韦达将π算到19位，因准确值的下一位是8，所以他的第19位“3”应为“4”。这样，他就以18位π值破了阿尔·卡西大约在一个半世纪以前创造的纪录。

韦达并不是一个职业数学家。他在年轻的时候，在家乡当过律师，后来从事政治活动。他曾经以律师的身份，担任过布列塔尼地方议会的议员。在罗罕侯爵的帮助下，他从1580年开始先后担任法国亨利三世（1551～1559）、亨利四世（1553～1610）这两个国王的顾问和枢密院成员。

韦达有许多传为佳话美谈的故事。其中一个是解出了罗曼于1593年在《数学思想》中提出的一个45次方程。故事说，荷兰驻法大使（一说来自荷兰的特使）对亨利四世说，法国没有能够解这一方程的数学家。亨利四世找到韦达，韦达解了出来。为此，亨利四世奖给他500法郎。不过，韦达的解中只给出23个正根而忽略了负根。他以符号代数方面的突出贡献，被尊为欧洲的“代数学之父”，成为16世纪法国最杰出的数学家，来凑算π的“热闹”也并非“不务正业”。

11. “以身殉π”鲁道夫——刻在墓碑上的36位π值

1596年，莱顿（原属德国现属荷兰）的数学家鲁道夫，通过对圆的外切和内接正2^{30}边形的计算，也得到16位准确π值。他一生算π的工作早已开始——1585年就通过计算圆的正192边形得到$\pi < 3.142\ 05 < 1521/464$，1586年他又得到$3.141\ 03 < \pi < 3.142\ 732$。

鲁道夫还在算得16位准确π值的同年即1596年，算到小数点后20位。他将这个值刊登在他出版的书封面上本人的画像下边，很是自豪。他也是用割圆术，计算圆的内接与外切正$60\cdot2^{33}=515\ 396\ 075\ 520$边形的周长，得到这个值的。

其后，鲁道夫又算了14年π值，在他逝世的1610年将π算到小数点后35位。他也是在计算了圆的内接和外切正$2^{62}=4\ 611\ 686\ 018\ 427\ 387\ 904$边形的周长，才得到这个值的，花费的精力和时间也就可想而知了。1615年，他的妻子出版的书中刊载了这个π值。

鲁道夫生于1540年1月28日，曾在有名的莱顿大学任数学、建筑学、军事科学教授。他在1610年的最后一天与世长辞，被安葬在莱顿（Ldyden）市的杨德·帕特中心教堂即圣彼德教堂的墓地里。他费尽毕生精力的、如此不凡的36位π值被镌刻在他的墓碑上（另一种说法是，只刻了第34～36位值，即只刻了“2-8-8”字样），成为全部碑文。可惜这碑早已丢失。德国人很自豪他们有这样一位“任凭弱水三千”，但“只取一瓢饮”而彪炳史册的同胞，所以把圆周率叫做“鲁道夫数”。

鲁道夫是如此不凡，以致他被许多文献反复记载，而频繁的传抄则引出许多趣事。例如他的国籍，分别被记为德国、荷兰，等等，这在11.2要专谈。又如，他的译名有范·西尤莲、范塞楞、鲁多尔夫、寇勒恩、固灵、今士等多种，以致《数学家词典》误以为有两个人，分别在192页和486页以“范·西尤莲”和“鲁道夫”列出两个条目。

1722年，日本人镰田俊清（Kamata Toshikiyo，？～1749）用“内外夹攻，逼近圆周率”的方法，算出了π的24位小数值。显然，他比鲁道夫落后多了。

12. 割圆术画上“句号”——格林贝格的 40 位 π 值

由鲁道夫“以身殉 π”才算到 36 位的事实可以知道，如果不改进方法，要想得到更准确的 π 值，是“难于上青天”的。

时代很快就产生出这样一种方法。因为发现光学中的折射定律，从而声名远扬的德国-荷兰莱顿的物理学家、数学家斯涅耳（1580～1626），在 1621 年对算 π 的古典方法做出了一种三角上的改进。利用这一改进，从原来的由古典方法所得出的任何一组 π 的界限，都可以推出一组新的准确得多的界限。他用这一方法，只算到 $2^{30}=1\ 073\ 741\ 824$ 边形，就算出了 π 小数点后 34 位值，而用古典法只能算得 15 位小数。如果算到 96 边形，斯涅耳法能得 7 位小数，而古典法只能得 2 位。不过，当时他没有给出这种方法的证明。

斯涅尔死后 10 年的 1654 年，荷兰物理学家、数学家惠更斯（1629～1695），才给出这种方法的正确证明。

1630 年，意大利罗马数学家格林贝格（Grienberger）利用斯涅耳法得到 40 位 π 值。这是用多边形周长算 π 最后的重要成果。

不过，话不能说绝。1979 年，中国学者俞文魮、陈开明，将圆内接和外切正多边形的边，用二次抛物线逼近，再由祖暅原理证得$4S_{2n}/3-S_n/3<\pi<S_{2n}/3-2T_{2n}/3$。其中 S，T 分别为圆内接、外切正多边形的面积，n 为边数。他们从正六边形割到 384 边形的时候，就得到 3.141 592 6。而从正方形割到 256 边形，就得 $3.141\ 592\ 61<\pi<3.141\ 592\ 66$。这显然比此前的割圆术效率高得多。可见割圆术又“老树发新枝”，也许还有潜力可挖。

5.4 微积分实现大突破——分析法算 π 及数值

什么是算 π 的分析法？不同文献的观点不尽一致。例如，有文献说，分析方法，即级数法，主要是将 π 展开为无穷幂级数来求 π 值，首创者是苏格兰数学家詹姆斯·格雷戈里。并将韦达的无穷乘积表达式及由此式算 π 的内容，编入“几何方法——割圆术”中。另一些文献则在“分析法时期”中首先列出前述韦达的算 π 公式，并说这是 π 的最早分析表达式。可见，各文献对韦达的方法是否划入分析法，以及什么是分析法的看法不尽相同。

分析是微分学、积分学、级数理论、函数论、微分方程、变分法、泛函分析等分支学科的总称（通常又把其中的前三种合称为数学分析），它和几何、代数并列为数学的三大分支。基于这种认识，本书将分析法算 π 从微积分诞生算起；而韦达的式子本质上属于割圆术范围。因此，我们对分析法的叙述，就从韦达之后的沃利斯开始。

1. 从沃利斯、格雷戈里到莱布尼茨——分析法算 π 开辟鸿蒙

1650 年，英国数学家沃利斯利用类比、归纳和极限的方法，从计算圆面积入手，得出 $\pi/2=(2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdots\cdots)/(1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdots\cdots)$，载于他 1665 年在牛津出版的名著《无穷算术》中。这本书中，还载有英国皇家学会（Royal Society，也译学士院）第一任会长布龙克尔（1620～1684）爵士由上述公式导出的 π 的连分数表达式

$$\pi/4=1+\frac{1^2}{2+}\,\frac{3^2}{2+}\,\frac{5^2}{2+}\,\frac{7^2}{2+}\cdots$$

不过，这两个好朋友各自发现的上述式子，都没有实际用于大规模算 π。

这是算 π 的分析法正式诞生之前的“山雨欲来风满楼”。

1671 年，苏格兰数学家詹姆斯·格雷戈里公开了他发现的公式：

$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7\cdots(-1 < x \leqslant 1)。$$

公开的简单经过如下：

1669 年，牛顿在他的《分析学》中给出了 $\arctan x$ 的级数展开式，并将结果告诉了当时皇家学会秘书科林斯（1625～1683），科林斯立即将这一结果通报给皇家学会会员、当时在圣安德鲁大学任数学教授的詹姆斯·格雷戈里。格雷戈里在 1671 年 2 月 15 日复信报告了自己的工作，说他不但在 1668 年得到了上述式子，还得到 $\tan x$，$\sec x$ 的级数展开式。事实上，他还先后得到 $\operatorname{arcsec} x$，$\ln\tan x$，$\ln\sec x$ 等函数的幂级数展开式，例如 $\ln(1+x)/(1-x) = 2x + 2x^3/3 + 2x^5/5 + \cdots$，就记载于他 1668 年出版的《几何练习》一书中。

但遗憾的是，格雷戈里在关键的时候，却“雪拥蓝关马不前”了——当时始终没有意识到，他在 1668 年发现、1671 年公开的上述公式已经为算 π 开辟了一个新的时代。如设式子中的 $x=1$，就得到了 $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$。1673 年，莱布尼茨（图 5-17）在独立发现前述格雷戈里展开式之后，才发现这个式子。他在 1674



图 5-17　莱布尼茨

年给英国皇家学会第一任两秘书之一、商人奥尔登伯格(1615～1677)的信中通报了这一式子——后人称为"莱布尼茨公式"。它标志着用分析法中的反正切式算π的开始。

但是，用莱布尼茨公式算π，则嫌收敛太慢，工作量太大。例如，要求出3.14要算628项。而要求出π的第6位小数，就不多不少正好要取$2\cdot10^6$项。下面对此加以说明。

对各项绝对值单调减少的收敛交错级数，只用前面一些项计算它的和，所产生的截断误差，不会超过被舍弃的第一项的值。所以如果假设舍弃的第一项的值为$1/a_{2n+1}$，则由小数点后第6位准确值的一个单位为10^{-6}知道，$1/a_{2n+1}<10^{-6}/4$，就解得$a_{2n+1}>4\cdot10^6$，由此算得$a_n=2\cdot10^6$，即200万项！舍去的第2 000 001项的值$<10^{-6}$，已不影响舍入误差。

要算200万项才能得到7位准确π值，这"太可怕了"！所以并没有人用这种方法去实际大规模算π。

《神奇的π》一书第11页说，用格雷戈里-莱布尼茨公式来计算π值，在"计算了500 000项之后，只会得到30位数。不幸，它不会全部正确——事实上，在所得的3.131 590 653 589 793 240 462 643 383 26中，两个0及最后的6都错了。"还说，这一则"数学花絮"，"不懂一点微积分是分享不了的，因为其中就涉及无穷级数收敛快慢的问题。"对这个结果和说法中隐含的失误，读者可以根据上面的方法自行评议。

2. 由于"无事可干"——牛顿也来助兴

1676年，牛顿(图5-18)发现了一个反正弦函数的展开式

$$\arcsin x = x + x^3/(2\cdot 3) + 3\cdot x^5/(2\cdot 4\cdot 5) + 3\cdot 5\cdot x^7/(2\cdot 4\cdot 6\cdot 7) + \cdots$$

他设式子中的 $x = 1/2$，就得到

$$\pi/6 = 1/2 + 1/(2\cdot 3\cdot 2^3) + 3/(2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5) + 3\cdot 5/(2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7) + \cdots$$

并由此算出 π 至 14 位小数。

此前的 1665 年，他用更快的算 π 公式 $\pi = 3\sqrt{4}/4 + 24[1/(3\cdot 2^2) - 1/(5\cdot 2^5) - 1/(2\cdot 7\cdot 2^8) - 3/(2\cdot 3\cdot 9\cdot 2^{11}) - 3\cdot 5/(2\cdot 3\cdot 4\cdot 11\cdot 2^{14}) - \cdots]$，将 π 算到 15 位小数。



图 5-18　牛顿

由于用上述式子算 π 效率并不高，所以牛顿的这个值还不如用古典法的、早于他的阿尔·卡西、罗曼等人。以至牛顿后来曾腼腆地承认：“我不好意思告诉你，由于那时无事可干，我已将 π 计算到了多少位数字。”

虽然牛顿计算 π 的位数不多，但此时由他和莱布尼茨创立的微积分正开始显示强大的生命力——他的计算是真正用分析法算 π 的第一次小试牛刀。

上述牛顿“无事可干”又是怎么回事呢？原来，牛顿于 1661 年 6 月 5 日以“减费生”身份考入剑桥大学三一学院，并于 1665 年 1 月得硕士学位后留校，在老师艾萨克·巴罗指导下做研究工作。不幸的是，这年 6 月，伦敦流行严重的瘟疫——鼠疫，夏季便有 1/10 的人死亡。因此，剑桥三一学院只好从 8 月 7 日起停课，学生一律回家。牛顿也回到他的老

家——英格兰东海岸林肯夏郡的沃尔斯索普小镇他母亲的农场。在此共住了大约一年半时间，由于他“无事可干”，便有解析白光为七色光、进一步研究微积分、发现二项式定理、初步发现万有引力定律等成果，直到 1667 年 4 月才返回剑桥——其间他曾短暂回校。

那为什么牛顿此时偏偏要去研究二项式定理和 π 呢？原来，他的同胞沃利斯没有完全解决求曲线 $y=(1-x^2)^{1/2}$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 两个值之间所围图形面积的问题，于是他也投身其中。他研究了求方程形式为 $y=(1-x^2)^n$ 的曲边形的面积问题，其中 n 取 0，1，2，3，…。他终于在结果的级数中发现了一些规律性，这使得他得以用内插法求得当 $n=1/2$ 的时候，这个级数所取的形式。由此，他最终得到二项式的任意次幂的一般展开式——二项式定理。而算 π 值则是它的吸引力——后来他承认说：“这个小数值确实让我着迷，难以自拔，我对 π 的数值进行了无数次计算。”

由此，牛顿也能够像沃利斯那样，把 π 表达成无穷级数的形式了。

这一节开头所说的两个式子和二项式定理，是牛顿 1665～1666年在老家发现的，但公开却是在 1676 年给奥尔登伯格的两封信中，所以有人把 1676 年作为发现年代。

牛顿“站在巨人肩上……”的名言，一直说是他的谦虚写照，其实，这正是他高傲贪功的暴露。有兴趣的读者，可参阅《世界科学》杂志 1994 年第 9 期中的《站在巨人的肩膀上》。

3. 分析法初显神威——夏普和马青的 72 位、101 位 π 值

（1）72 位准确 π 值。1699 年，英国数学家夏普（1653～

1742）假设格雷戈里公式中的 $x=\sqrt{1/3}$，就得到$\pi/6=\sqrt{1/3}\cdot[1-1/(3\cdot3)+1/(3^2\cdot5)-1/(3^3\cdot7)+1/(3^4\cdot9)-\cdots]$。他用这个级数将 π 算到小数点后 72 位，其中 71 位正确。得到这个 π 值的年代，还有 1705，1717 等说法。他是在英国天文学、数学家哈雷（1656～1742）的指导下得到上述成果的。后者以预测“哈雷彗星”的回归而英名远扬。

下面，我们来看看夏普的工作的意义。

同样用格雷戈里公式，如果假设其中 $x=1$，就得到$\pi/4=1-1/3+1/5-1/7+1/9-\cdots$；而设 $x=\sqrt{1/3}$，就得到$\pi/6=\sqrt{1/3}\cdot[1-1/(3\cdot3)+1/(3^2\cdot5)-1/(3^3\cdot7)+1/(3^4\cdot9)-\cdots]$。

经过计算可以知道，由前式求 π 准确到小数点后两位要用 200 项，那由后式——交错级数要用多少项呢？由于第 6 项 $\sqrt{1/3}/(3^5\cdot11)=0.0013$，已不影响结果，所以用后式只取前 5 项。

算出 3 位准确 π 值，一个用 5 项，一个要用 200 项，格雷戈里公式的这两个“孩子”的“优”、“劣”，的确泾渭分明！

那这么“优秀”的夏普公式，为什么在莱布尼茨公式发现后的 26 年内，没有被发现呢？这不但说明夏普的智慧，也说明在科学探索的过程中，人们常有“云横秦岭家何在”的处境。

从 1671 年格雷戈里发现格雷戈里公式，而没有能够发现 $x=1$ 时的莱布尼茨公式，到莱布尼茨捅穿这层窗户纸，中间历经 2 年；从 1673 年莱布尼茨发现莱布尼茨公式，而没有能够发现 $x=\sqrt{1/3}$时的夏普公式，到夏普捅穿这层窗户纸，中间历经 26 年。这“碰到鼻子尖的真理”，怎么就没有人更早发现呢？科技发现发明史上这种屡见不鲜的现象，表明了科技探

索的艰辛和人主观能动性的重要。只有“为伊消得人憔悴”的科学家，才能发现“那人却在灯火阑珊处”。

自从1630年格林贝格用古典法算得40位π值之后，虽然新发明了分析法，但在夏普之前，分析法在提高π值位数上并无辉煌战果。69年后的夏普用分析法把π值增加到72位，才开始了分析法大规模算π的实战历程。其后令人眼花缭乱的各种算π的分析法如雨后春笋。这一漫长的历程一直持续了近300年，直到20世纪50年代之后。

（2）101位准确π值。1706年，英国伦敦格雷斯汉姆大学天文学教授马青（1680至1685～1751至1752），发现了一个很重要的公式：$\pi/4 = 4\arctan 1/5 - \arctan 1/239$。他分别将arctan1/5和arctan1/239用格雷戈里公式展开，由此算到π的100位小数。这是分析法出现后算π的“平型关大捷”——突破百位大关。他的公式被长期作为算π的“优秀”公式之一，以至1949年人类第一次用电子计算机计算π值时，也用到这个公式。

（3）分析法如何算π。以下以马青公式算出小数点后7位π值为例，加以说明。

先将马青公式用格雷戈里公式展开，就有

$$\pi = 16(1/5 - 1/3\cdot5^3 + 1/5\cdot5^5 - 1/7\cdot5^7 + 1/9\cdot5^9 - 1/11\cdot5^{11}) - 4(1/239 - 1/3\cdot239^3)。$$

因为$16/(11\cdot5^{11})$和$4/3\cdot239^3$以后的项对π值小数点后第8位已没有贡献，不取。所以

$$\pi = (3.200\,000\,00 - 0.042\,666\,67 + 0.001\,024\,00 - 0.000\,029\,26 + 0.000\,000\,91 - 0.000\,000\,03) - (0.016\,736\,40 - 0.000\,000\,10) = 3.141\,592\,65$$

由于末位的“5”不可靠，所以$\pi=3.141\ 592\ 7$。

4. 东方也不甘落后——中日算π点滴

在西方算π硕果累累的同时，中国和日本也奋起直追。

(1) 中国人的20位和101位π值。1713年，在《数理精蕴》中，给出过19位小数的π值。这本书是清康熙时编撰的一部初等数学百科全书，是《律历渊源》的第二部分。

1712年，康熙接受了陈厚耀（1648～1772）“请定步算诸书以惠天下”的建议，并命令梅珏成主持，会同陈厚耀、何国宗、明安图等编纂天文算法书。1721年，梅珏成等编成《历象考成》、《数理精蕴》、《律吕正义》、《律历渊源》共100卷。其中《数理精蕴》53卷，主要内容是谈算术、代数、三角、几何的成就；这些书，是在梅文鼎的数学著作和白晋、张诚的讲稿等基础上编成的。白晋、张诚在1687年来华后，1689年康熙召见，请他们在宫中学满语，以满语讲数学。他们二人和其他人，在1890年陆续译出《几何原本》等书作讲义和参考资料，这些便成了《数理精蕴》的材料。《律历渊源》100卷正式出版时间为1723年。所以，如以出版为准，则《数理精蕴》所记20位π值为1723年。

1874年，中国清代数学家、清朝大臣曾国藩的次子曾纪鸿、左潜、黄宗宪等人在《圆率考真图解》中，曾记有求π值的两个反正切式，分别是

$$\pi/4=\arctan 1/2+\arctan 1/3$$

$$\pi/4=\arctan 1/4+\arctan 1/5+\arctan 1/12+\arctan 1/13+\arctan 5/27$$

其后，曾纪鸿用了一个多月，求得π的100位小数。与他同在一个小数学团体中的数学家丁取忠（1810～1877），在这

本书的序言中也说："曾君锐于思而勇于进，创立新法，以月余之力推得圆率百位，并周求径率（1/π），亦以除法补至百位。"后来，这个小数学团体中的另一位成员黄宗宪随公使到英国，在英国博物院找到了158位的π值，两相对照，证明他们的计算结果完全正确。

然而，钱宝琮在1939年的《数学杂志》二卷一期上发表论文《曾纪鸿圆率考真图解评述》，对曾纪鸿是否确用自己的公式算得100位小数π值表示怀疑，并在他其后编的一些文献中再次表示了同样的怀疑。钱说，《圆率考真图解》中有用上述二公式分别算得15位和24位小数π值的详细草式，但分别用这两式算得100位小数的π值，至少要用反正切函数的幂级数展开式265项和310项。而经过他仔细核对，发现曾纪鸿上述草式中，arctan1/5和arctan5/27这两个值的最后3位数字都有错误，因而曾纪鸿能得到24位小数的π值，纯粹是一种偶然巧合。既然如此，曾纪鸿有没有用前述公式算出100位小数的准确π值，也就使人怀疑了。对钱的以上怀疑，本书作者至今没有发现异议。

那么，曾纪鸿究竟有没有用前述公式算出101位π值呢？如算出来了，那他的算式中是否也有他算24位小数π值时那种错误呢？如没算出来，那他又是怎么得到的呢？

（2）日本人的42或43位和51位π值。日本数学家建部贤弘（又译建部砚湖，1664～1739）是关孝和（1639至1642～1708）的学生。他们在1690～1723年间，曾经将π算到41或42位小数。

十七八世纪，关孝和、建部贤弘、关孝和的徒孙松永良弼（1692至1694～1744至1748），曾经将π算到小数点后50位准

确值。关孝和用的是“增约术”。松永良弼用的是“圆理”，其公式为$(\arcsin x)^2/2 = x^2/2 + 2^2 \cdot x^4/4! + 2^2 \cdot 4^2 \cdot x^6/6! + \cdots$，载于他和他的老师建部贤弘的《圆理缀术》一书中。用“圆理”写成的《方圆算经》中，就记有上述 π 小数点后 50 位的准确值，其中也有久留岛义太（? ～1757）的贡献。松永良弼算得 51 位 π 值的年代有 1720 和 1739 等几种说法。

5. 从德·拉尼到黎赫特——113 位到 501 位

（1）113 位 π 值。法国数学家德·拉尼于 1719 年算得 π 的 127 小数值，但只有 112 位正确，他用的是夏普公式。

（2）127 位 π 值。1755 年，欧拉发现了 $\pi/4 = 5\arctan 1/7 + 2\arctan 3/79 = 2\arctan 1/3 + \arctan 1/7$。1789 年，奥地利数学家乔治·威加（1754 或 1756～1802）用这两个公式将 π 算到 143 位小数，但只有前 126 位正确。同年，他还发现了 $\pi/4 = 4\arctan 1/5 - 2\arctan 1/408 + \arctan 1/1393$。

（3）137 位 π 值。1794 年，乔治·威加再接再厉，算出 π 的 140 位小数值，但只有前 136 位正确。此外，《趣话中华科技五千年·数理化篇》(刘玉瑛等，中国矿业大学出版社，1999) 45 页记有“1794 年凯洛格·冯·贝格男爵得到 136 位小数 π 值”，可能贝格就是乔治·威加。

（4）153 位 π 值。1837 年，法国巴黎数学家卡勒特(J.F.Callet)，在一份报告中公布了自称是他得到的 154 位小数 π 值，但只有前 152 位正确。这 π 值可能是“克隆”的。

“克隆”的说法，并非空穴来风。此前 18 世纪末，冯·查奇（F.X. von Zach）就曾经在英国牛津的拉德里费图书馆看到了一个著名的——但名字已无从知晓的作家的手稿，上面记有

154位（152位正确）小数的π值。

此外，英国数学、天文学家威廉·卢瑟福（1798～1871），用勒让德（1752～1833）的$\pi/4 = 4\arctan 1/5 - \arctan 1/70 + \arctan 1/99$，将π算至小数点后208位，但也只有152位正确。算出年代有1824，1840和1841等多种说法。

（5）201位π值。1844年，仅仅花了两个月时间，德国汉堡数学家达什（1824～1861）和斯特拉斯尼茨基[L.K.Schulz von Strassnitzky（或 Stassnitzky）]，就用$\pi/4 = \arctan 1/2 + \arctan 1/5 + \arctan 1/8$，将π算到小数点后205位，但只有200位正确。他们用的公式是许尔兹（Schultz）教授在此前发现的。

为什么他们只用了短短的两个月，而不是其他数学家用的数以年计的时间呢？主要是因为达什"也许是前所未有的心算家"——他能在54秒内心算两个8位数的乘积。他的其他使人叹为观止的心算纪录是：6分钟——两个20位数的积，40分钟——两个40位数的积，525分钟——两个100位数的积，52分钟——1个100位数的平方根。据说，他可以连续算几个小时的π值以后，睡上一觉醒来又接着算。很可惜这位15岁就成为非凡的计算员、20岁就算出201位正确π值的、当过高斯助手的一代心算天骄，在37岁就英年早逝了。

（6）249位π值。1847年，托马斯·克劳森（1801～1885）算到π的小数点后250位，但只有248位小数正确。他用的是1755年欧拉发现的$\pi/4 = 2\arctan 1/3 + \arctan 1/7$，和1706年马青发现的$\pi/4 = 4\arctan 1/5 - \arctan 1/239$。克劳森的国籍有丹麦、德国两说——他可能不只是在出生国生活。作为天文学家，1865～1871年他担任了德尔普特天文台台长。

（7）331位π值。舍普勒在《π的年表》中说，1853年，德国（?）数学家黎赫特（Richter,?～1854）将π算到小数点后333位，但只有330位才正确。

（8）501位π值。1854年，黎赫特推进到小数点后500位。这一年他去世了，这个值在1855年才公之于世。舍普勒的《π的年表》等资料载：雷歇（Recher）算出过π的500位小数。黎赫特与雷歇仅外文名略异，所算π值相同，有可能是同一个人。

此外，《数学家词典》433页说，黎赫特（Jean Richter，1537～1616）是捷克数学家，曾算到500位小数的π值。从这里的黎赫特的生卒年代来看，在17世纪初以前将π算到这么多位是不大可能的——1610年鲁道夫才算到35位小数，因此这个说法有误。

6. 可敬可怜的山克斯——708位π值刻在墓碑上

1851年，英国数学家——又一位“以身殉π”者威廉·山克斯（1812～1882），将π算到319位。接着在1853年又先后算到530和608位。虽然后来知道这两个π值只有前528位才正确，但这却是他从1843年起算π“十年寒窗苦”的结晶。他用的马青公式，得到了威廉·卢瑟福1853年所算441位π值的帮助。

又经过20年的努力，山克斯用台式机械计算机，再借助马青公式，在1873年将π算到小数点后707位。他的708位π值，被刊登在1873～1874年的《皇家学会学报》上，而此时距他大规模算π的1843年则有30年了。由于他从小数点后528位起就开始出错，于是他30年的心血大半付诸东流。

不过，山克斯的工作一直没被遗忘。大约100年之后，出生在苏联的美国著名科普、科幻作家阿西莫夫（1920～1992）还称他为“可怜的山克斯”！他的“可怜”之处不仅在于几十年的心血大多打了“水漂”，而且在于他至死也不知道已经出错。不但他不知道，而且其他人在其后73年内也不知道，以至这708位不全正确的π值被镌刻在他的墓碑上。而且，直到万国博览会于1937年在巴黎召开的时候，“发现馆”的天井里依然显赫地刻着这个π值，引得大家驻足流连，一时传为趣话。

山克斯“只取一瓢饮”的精神也激励着来者。直到1944年5月至1945年5月，弗格森仔细核算出自己正确的541位π值后，才发现山克斯的π值仅有前528位正确。

7. 从弗格森、雷恩奇到列维·史密斯——1121位人工算π创纪录

1946年，英国弗格森指出山克斯的708位π值从小数点后528位起开始出错，并算出正确的621位π值。不过，有人说，“528位以后不正确，是由弗尔德林发表的”；这位“弗尔德林”可能就是弗格森。而另有人则说，“后来Alas发现这个计算在527位之后是错的”。不知这位“Alas”是谁？

弗格森还于1947年1月公布了他的711位π值。同月，法裔青年、美国华盛顿的数学家雷恩奇即小伦奇（1911～）发表了809位π值。但不久弗格森就发现雷恩奇在小数点后723位上的错误。所以雷恩奇π值的正确部分为723位。

1947年9月，大西洋两岸的弗格森和雷恩奇各自算出809位准确π值，并于1948年1月联合发表了经他们共同校正的这个值。雷恩奇用的是马青公式；而弗格森用的是高斯的π/4

$= 3\arctan 1/4 + \arctan 1/20 + \arctan 1/1985$。弗格森当时在英国皇家海军学院工作。虽然他们计算的结果超过了 809 位，但却故意只发表了 809 位，为的是和 P. 彼德森（P. Pedersen）算出的 809 位 e（自然对数的底）值“平分秋色”。

1949 年 6 月，美国数学家列维·史密斯（Levi Smith）和雷恩奇，算出 1121 位 π 值（一说“1118 位小数”），创造了人工算 π 的最高记录。

1909 年，威廉·詹姆斯在《真理的意义》一书中曾经预言：“如果我们攻克几何关系的世界，你将发现 π 的第一千位小数静静地安睡在那里；但是，恐怕没有哪一个人想把它算出来。”可是，仅仅过了 40 年，他的预言就被列维·史密斯和雷恩奇打破。看来，人类的智慧和潜力，是不能轻易低估的。

历经三个世纪，“人工”算 π 宣告结束。而“人工”，早期是指用纸、笔由“手工”计算，晚期还加上台式手摇计算机、计算尺等实用机械计算器具。

5.5 电子计算机算π——“芝麻开花节节高”

1946 年 2 月 15 日，电子计算机“埃尼阿克”——ENIAC（Electronic Numerical Integrator and Computer），在美国进行了首次成功表演并交付使用，它在很长一段时间内被认为是世界上“第一台”电子计算机。其实，“第一台”电子计算机是英国的“巨人”机（Colossus——音译“卡罗萨斯”），它从 1944 年 1 月 10 日起就在伦敦为二战秘密运行。而 ENIAC 的诞生地——美国宾夕法尼亚大学，在其官方文件中仅仅称它是世界上“第一台全电子数字计算机”。

由于用机器代替人工计算具有可靠、快速等优点，所以不久就被用作算π的、威力强大的武器。本节说的就是用各种公式，借助于电子计算机算出越来越多位数π值的历程。

1. 计算机是如何算π的

电子计算机算π的大致过程是，选定算π公式，将它编入程序后输入计算机，再发出计算指令，最后打印出来。以下是用C语言由高斯公式算π的实例。

```
#include <math.h>
void main ()
{
double p;
/* GAUSS  FORMULA */
p=12.0*atan2 (1.0, 4.0) +4*atan2 (1.0, 20.0) +
4*atan2 (1.0, 1985.0);
printf ( "GAUSS PI= % 1.15 f\n", p);
}
```

GAUSS PI=3.141 592 653 589 793。即得16位π值。

当然，后来又有许多高级程序算π。以下为1949年开始的、用计算机算π的历史。

2. 从2036位到10 000位

1949年，在美国马里兰州（Maryland）阿伯丁的陆军弹道研究所（Aberdeen Proving Ground's Ballistic Research Laboratories）里，包括冯·诺伊曼（John von Neumann, 1903～1957）、迈特罗伯里斯（N.C.Metropolis）、芮特威斯伦

(Ggorge Reitwiesner) 在内的“几个小伙子”，用ENIAC和马青公式算出π的小数点后2048位。不过，只有2035（一说2037）位正确。这是人类第一次用电子计算机算π，包括准备、整理资料和打孔共用70小时。正确的结果，再次证实山克斯的708位π值的确从小数点后528位起就开始出错。消息最早发表在《科学美国人》1949年12月期第30页和1950年2月期第2页上。一场电子计算机算π的“马拉松”竞赛，由此打响了“发令枪”。

1954（一说1955）年，美国尼科尔森（Nicholson）和杰勒尔（Jeenl），用海军兵器研究计算机NORC（Naval Ordnance Research Calculator），将π推进到3089（一说3092）位小数，仅用了13分钟。

1957年，英国人费尔通（Felton Pegasus）又用电子计算机算到7480位。

1958年1月20日，法国人弗朗索瓦·吉努斯（1927～）在法国IBM公司工作的时候，用IBM-704型机练习编程，有意选择算π至1万位小数。用了100分钟，最终如愿突破1万位大关。5月，费尔通也用PEGASUS型机算到10 021（一说10 017）位小数，用了33小时。

3. 联合作战攀登“10万位高峰”

吉努斯继续前进。1959年7月20日，在巴黎附近的法国原子能委员会所在地——隆克莱，他和吉劳德（1923～）用IBM-704型机将π值算至小数点后16 167位，用去4.3小时。这一年，美国国际商业机器公司（IBM），制成了第二代电子计算机——世界上第一台晶体管电子计算机IBM-7090。

吉劳德是法国的一位女数学家，由于她不知疲倦地多次算π并成就斐然，为法国争了光，也让全世界刮目相看。所以，有人曾提议按德国人称π为“鲁道夫数”的作法，在法文中称π为“吉劳德数”。不过，随着时光的推移，她的纪录被打破而不值一提。这一称呼便被搁置起来，“了于未了，不了了之”。

1961年初，英国数学家罗滨逊用电子计算机在13小时内，进行了3500万次的运算，求得圆周率小数点后10 880位。显然，他的这个成绩在此时不过是“小菜一碟”。

1961年7月29日，丹尼尔·山克斯（1917～）和华盛顿的雷恩奇用IBM-7090型机，将π算到小数点后100 265位，终于登上10万位高峰。他们写的《计算π到小数点后10万位》一书，于1962年出版。两人先后用了两个公式计算，其结果完全一致：用挪威斯托默（1874～1957）的公式 $\pi = 24\arctan 1/8 + 8\arctan 1/57 + 4\arctan 1/239$，费时523分钟；而用高斯的公式 $\pi = 48\arctan 1/18 + 32\arctan 1/57 - 20\arctan 1/239$，则用时481分钟。

4.1955和1965年的两件大事

1964年4月7日，第三代电子计算机在美国IBM公司诞生。第一代机ENIAC早已成为明日黄花，于9年前的1955年10月2日正式“退休”。它实际运行了80 223小时，而这个运算量，比有史以来人类大脑所有的运算量的总和还要多。ENIAC的乘法算速是3000次/秒，加法算速是5000次/秒——约为人工的20万倍；但比起算速为上千万次/秒的第三代机来说，确是“小巫见大巫”，只有目睹千帆竞渡、万木迎春。这个庞然大物有30吨，高度超过10米，占地167米^2，由

18 800 个电子管和 1500 个继电器组成，耗电 150 千瓦，造价 48 万美元。用这些参数对比我们现在的笔记本电脑，使人联想起当年的“万事开头难”，和感受半个世纪以来科技的迅潮猛浪。10 年后的 1965 年，它作为古董被送到华盛顿的史密斯研究所，至今还能看到它的“凛凛威风”兼老态龙钟。

1965 年，数学家还发现将新出现的快速傅里叶（1768～1830）变换 FFT（Fast Fourier Transform），用于高精度乘法的时候，比通常方法快得多。这就戏剧般地减少了计算机高精度算 π 和其他数学常数所花的大量时间，为计算出它们多得令人咋舌的位数铺平了道路。

5．200 页书中的“100 万”

突破 10 万位后，科学家们向 100 万位挺进。1966 年 2 月 26～27 日（一说 22 日），在巴黎的法国原子能委员会，吉劳德和她的助手费里德（Filliatre）小姐，用这个委员会的一台 STRETCH（一说 IBM-7030）型机，将 π 算至小数点后 250 000 位。

接着，在 1967 年 2 月 25～26 日，吉劳德又与她的助手狄查姆（Dichampt）小姐等，用 CDC-6600 型机算出 π 的500 000 位小数值。这次，法国 CDC 公司的两位计算机工程师也给予了技术帮助。计算仅用 28 小时 10 分钟，反而比算250 000位那次用时少得多。计算和复核时，分别采用了 5.5 的 3. 中高斯的和斯托默（1874～1957）的公式。在这一计算的内部报告的附录里，扼要说明了各种计算的技术数据；例如，计算 arctan1/18 就需要展开约 20 万项。

美国数学史家伊夫斯说，这是一次“异想天开的计算”。曾在美国科罗拉多大学电子工程系工作的捷克斯洛伐克科学家

佩特·贝克曼（Peter Beckmann），在《π的历史》（A History of π）一书中，记载了这次运算，这本书于1971年在纽约圣保罗街的马丁出版社出版。

1973年5月24日，吉劳德和她的女同事玻叶（W.A.Bouyer）等人，用CDC-7600型机花去23小时18分钟，将π算到小数点后1 001 250位，最末10位为5 779 458 151。法国原子能委员会认为这一成果极为重要，次年将它印成一本厚200页（一说400页）的书存留于世。这次计算，得到了法兰西科技情报研究所所长的赞助，为她们开放计算中心，并提供大型机。这次计算的程序是用COMPASS语言编写的。1973年9月3日，位于瑞士日内瓦附近的欧洲原子能研究委员会（CERN）进行了复核鉴定，结果没有发现错误。

6. “沙-波法”和“椭圆积分法”算π大突破

20世纪70年代后期，用电子计算机算π发生了新变化：数学家们已不再满足于用了200多年的微积分方法——特别是其中反正切式按格雷戈里公式展开的算法，而寻找各种各样新方法。以下介绍两种：

（1）“沙-波法”即“相关二次算法”。1976年，欧仁·沙拉明（Eugene Salamin）在《计算的数学》（*Mathematics of Computation*）第30卷上，发表了重要论文《利用算术平均数与几何平均数计算π值的新方法》。理查德·波伦特（Richard Brent）也于同年独立发现了类似的新方法。这种算法是基于算术-几何平均值，和某些在19世纪原来属于高斯的思想——但高斯没有将它和算π联系起来。这种算法产生的近似值收敛到π的速度，比任何经典公式都快得多。“沙-波法”也叫“高

斯-沙拉明-波伦特法"，简述如下：

设 $a_0=1$，$b_0=1/\sqrt{2}$，$s_0=0.5$，对于 $k=1, 2, 3, \cdots$，计算

$$a_k=(a_{k-1}+b_{k-1})/2$$

$$b_k=\sqrt{a_{k-1}b_{k-1}}$$

$$c_k=(a_k)^2-(b_k)^2$$

$$s_k=s_{k-1}-2^k c_k$$

$$\pi_k=2(a_k)^2/s_k$$

然后，π_k 平方地收敛于 π。这就是说，这个算法的每次迭代大致使正确的位数加倍，特别地，各次迭代依次产生 π 的 1，4，9，20，42，85，173，347 和 697 个正确数字。为了将 π 算到 4500 万个准确的十进位数字，只要 25 次迭代就足够了。不过，这种迭代每次都必须使用和最终结果所要求的一样高的数字精度。

沙拉明在介绍了他的新公式之后，还通过私人通信谈过他的新打算："拉菲尔·芬克尔，李奥·吉拜斯，查理·西蒙尼三人，现在正致力于研究把我的论文中所提出的 π 值计算方法付诸实施。通过牛顿迭代法，非常精密的除法与开平方运算是可以转变为乘法运算的。而非常巨大的数字的乘法运算，又可以利用德国数学家匈哈格与斯特拉逊所建议的 FFT 来加以执行。如果用 ILLIAC-Ⅳ型巨型电子计算机，估计算出 3300 比特大约要 4 小时。"这里，"比特"意为"二进位数字"。3300 万比特大约相当于十进位制 1000 万位。

"沙-波法"要求高精度地开平方，而在马青公式中则不要求这种运算。高精度的平方根可以用牛顿迭代有效地计算，它仅仅使用乘法和某些低成本的运算。每次迭代都使数字精度的水平加倍。这样，像"沙-波法"这类算法就能在计算机上非常快地实现。

以上第一种方法即“沙-波法”还有一些不同的算法，但本质上属于同一类型。

例如①“波尔文算法”。1985年初，在美国达荷塞大学工作的加拿大乔纳森·波尔文（Jonathan M. Borwein）和彼德·波尔文（Peter B. Borwein）发现的这种四次迭代式四次方收敛于π，即具有四阶。

又如，在1996年，两位波尔文还证明了对任意的m，都存在收敛于π的“m阶逼近”。例如$m=9$时，就有②“9阶算法”。

对“沙-波法”、法①、②和“m阶逼近”，有进一步兴趣的读者，可阅读《数学译林》杂志1997年3期《圆周率的探索》一文。

“沙-波法”的另一算法③的结果如表5-2，其中“n”指运算次数，“有效位数”指该次数对应π准确值的位数。由表5-2可见，π的有效位数随“迭代”或“运算”次数的增加而猛增。

表5-2（表中为专家估计值）

n	有效位数	n	有效位数
1	2	15	89 408
2	7	16	178 824
3	18	17	357 655
4	40	18	715 318
5	83	19	1 430 644
6	170	20	2 861 296
7	344	21	5 722 600
8	693	22	11 445 209
9	1 392	23	22 890 427
10	2 788	24	45 780 864
11	5 582	25	91 561 737
12	11 171	26	183 123 484
13	22 347	27	366 246 978
14	44 701	28	732 493 966

以上“沙-波法”及几种派生方法，特别是其中的①法，成为一些数学家用电子计算机算π的重要方法。例如，日本东京大学的金田康正（1949～），在1986年以后的十多年里，多次用“沙-波法”和①法算π。又如，美国达维德·贝利（David H. Bailey）在1986年也用过①法算π。

以上“沙-波法”及几种派生方法，极大地缩短了算π的时间，其对比见图5-19。

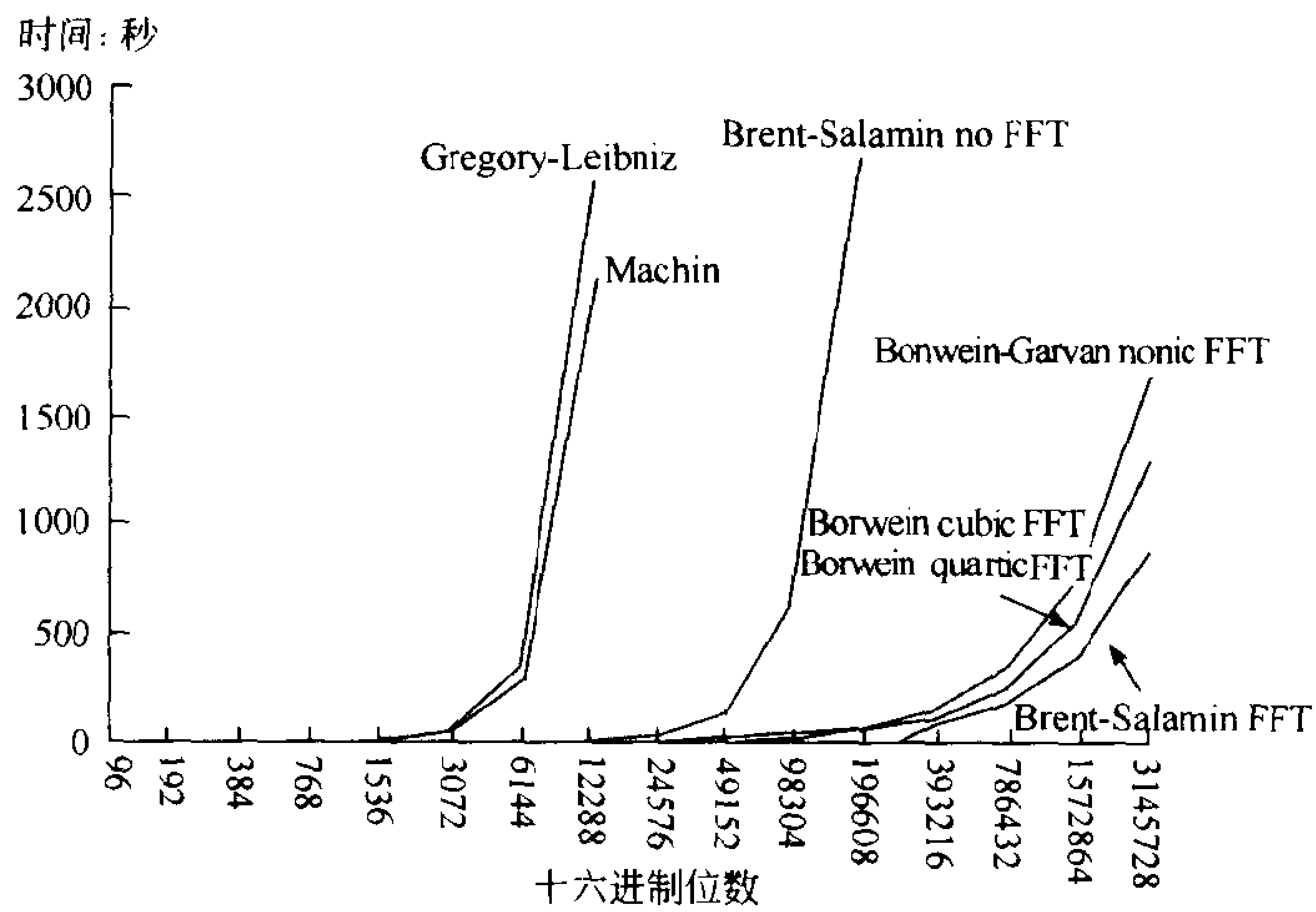


图5-19　沙-波法

图5-19的纵坐标是在IBM-RS-6000-590工作站上用二进制计算π到各种精度所花的时间。横坐标是π的16进制位数，用4（$=\log_2 16$）来乘这些数可以得到等价的2进制位数。而用1.204 21…（$=\log_{10} 16$）乘这些数可得到等价的10进制位数。在其他计算机系统上进行这种运算，结果可能会稍有不同。例如，金田康正在1995年10月用日立计算机将π算到约60亿位时，法②比“沙-波法”快些（116小时比131小时）。但图5-19的比较总体是不会错的：现代算法比经典分析法速

度快许多倍，特别是计算过程中用 FFT 的时候。

（2）“椭圆积分法”。第二种方法建立在椭圆积分变换的理论上，我们称为“椭圆积分法”。而始作俑者则是印度传奇的数学家拉马努金（1887～1920），他在 1914 年《模方程和 π 的逼近》一文中，给出了 14 个算 π 公式。其中之一，是关于椭圆积分变换理论和 π 的快速逼近之间，联系紧密而优美的公式——我们称为“拉马努金公式”（简称 LM）：$1/\pi = (2\sqrt{2}/9801)\cdot \sum_{n=0}^{\infty}[(4n)!\ /(n!)^4]\cdot[(1103+26\,390n)/396^{4n}]$。

不过，拉马努金没有给出公式的证明，仅仅给出了一些不充分的解释。直到 1987 年，才由前述乔纳森·波尔文和彼德·波尔文给出证明。

用这个公式只取前两项就有

$$1/\pi=\{[2\sqrt{2}/9801]\cdot[0!\ /(0!)^4]\cdot[(1103+0)/396^0]\}$$
$$+\{[2\sqrt{2}/9801]\cdot[4!\ /(1!)^4]\cdot[(1103\ +26\,390)/396^4]\}$$

由此可算得 π=3.141 593 5… =3.141 59…，就得到了 6 位准确 π 值。由此可见，“LM”是一个收敛得很快的公式。

这 14 个公式中还有一个后来发现能计算 π 二进制单个数字的式子

$$1/\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^3\cdot[(42n+5)/2^{12n+4}]$$

1985 年以来，椭圆积分法为一大批计算机算 π 提供了又一新方法。美国数学家哥斯佩尔（W.Jr.Gosper）、达维德·贝利（David H.Bailey）、日本金田康正等用它创造的新纪录将在下面谈到。对这一公式及理论有更多兴趣的读者，可看《数学译林》杂志 1993 年 2 期《Ramanujan，模方程，π 的逼近或如何算出 π 的 10 亿位》一文。

7. 谁敢"揭榜""1000万"

约1977年，美国数学家科诺思即道纳德（Donald E.Knuth）和他的学生们，对计算机的乘法设计了一种较快的算法，把π值推进到150万位。它也被印成了一本书，厚300页。

1981年6月18日～7月1日，日本筑波大学数学家鹿角理三吉（Kazunori Miyoshi）和久仲山（Kazahika Nakayama），以及该校电子、情报工学系讲师三好和宪（1946～），在金田康正助理教授和中山和彦教授（1934～）的协作、支持下，利用东京大学大型计算中心的富士通FACOM-M-200型机，花去137.30小时，算π至2 000 038位有效数字。他们用的公式是 $\pi = 32\arctan 1/10 - 40\arctan 1/239 - 16\arctan 1/515$。它是布泽盖格尔即布塞卡（Buzengeiger）或克林斯根蒂纳（?）在1730发现的。他们还用马青公式进行了核对。

1982年，金田康正和在日本水泽国际纬度天文台的田村芳昭（Yoshiaki Tamura），将π算到小数点后4 194 288位。接着，他们又推进到小数点后 $8\ 388\ 608 = 2^{23}$ 位（一说8 388 576位），总共花去6.8小时。用的是沙拉明的算法和日立HITACHI-M-280H型机。同年，他们二人和Yoshino仍然用这台计算机，算出了π的 $2^{24} = 16\ 777\ 216$ 位小数值。

1983年10月，日本数学家Ushiro和金田康正，用一台比日立HITACHI-M-280H型机更快的日立HITACHI-S-810-20型机，算π至比16 777 216位小数更少的10 013 395位，证明了其中至少有10 013 395位是正确的。

π值的小数位数突破1000万位大关，是此前国际数学界

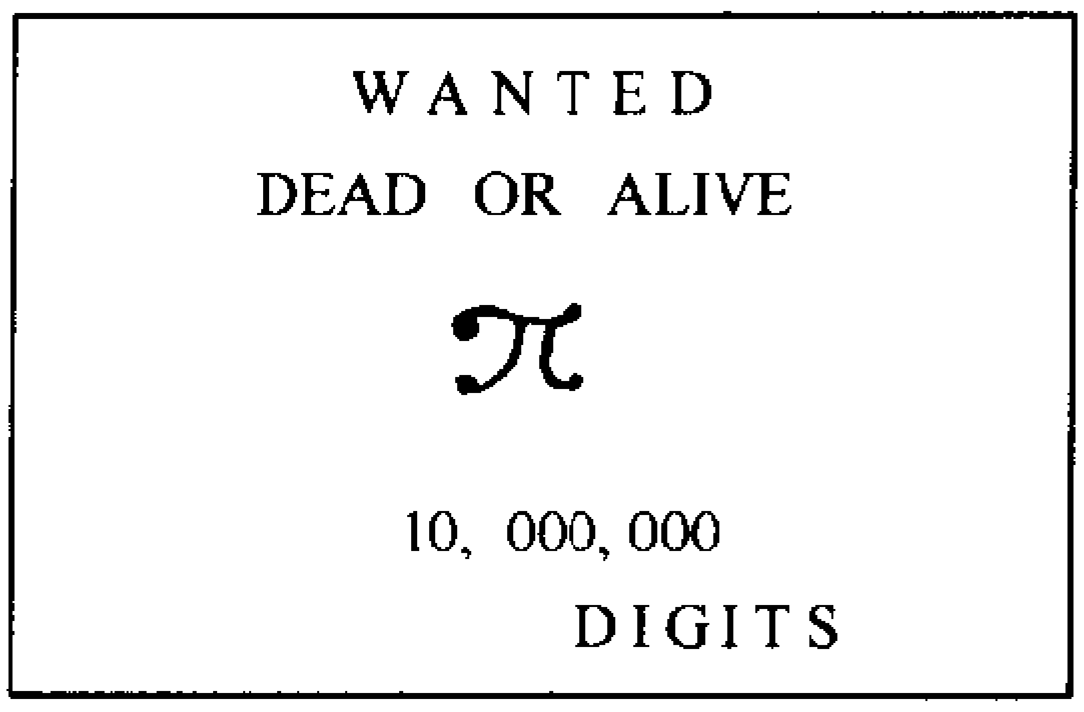


图 5-20

和计算机科学界多年的梦想。图5-20是当时的广告画，集中代表了这种梦想。

它似乎在说："谁敢来揭榜！"

金田康正又译金田吉政、金田安政、廉正莆田、Y. 卡尼达。他的日文名字是かねだ，因为一般欧美人不识汉字，都用英文字母代替，经过几番转译之后，就成了 Y. 卡尼达了。

田村芳昭又译田川吉明或嘉晃田村，他和金田康正是从 20 世纪 80 年代起活跃到现在的算 π 前沿的数学家。

8. "1 亿位"感谢波尔文

突破 1000 万位的梦想成真后，人们依然"马不停蹄"。

1985 年，美国的哥斯佩尔使用 SYMBOLICS-3670 型电子计算机，细心地利用"LM"中精心编制的赋值，算出 π 的 17 526 200位小数值。他的一件趣事是，"令人可笑的是"，当他算出 π 的 1700 多万位时，却不能在数学上证明"LM"右边的和收敛于 1/π。他把这个计算的 1000 万位与金田康正和其他人先前的计算相比较。到了 1000 万位，"LM"都是正确的。

1986 年 1 月，美国加利福尼亚 NASA 测量研究中心的达维德·贝利，以前述"波尔文算法"为基础，在 CRAY-2（"克雷-2"）型机上，花费 28 小时算出的 π 值达小数点后 29 360 111（或 29 360 000）位。达维德·贝利把"波尔文算法"与一种较慢的方法——也是前述两位波尔文给出的相对

照，证实他的计算结果正确。同年 9 月，田村芳昭和金田康正又用 HITACHI-S-810-20 型机算到 33 554 415 位，10 月又推进到67 108 840位。

1987 年，金田康正、田村芳昭和 Kubo 等人用一台日立 HITACHI-S-810-20 型机，将 π 算到小数点后 1.3355 亿（或 133 326 001）位，花去 35 时 14 分。这就终于突破了 1 亿位大关。同年 1 月，他们还用 NEC-SX-2 型巨型电子计算机，按“波尔文算法”计算到小数点后 134 217 728 位，花去 36 小时。

9. 10 亿位载入“吉尼斯”

1988 年 1 月 27 日，金田康正和田村芳昭仍然用日立 HITACHI-S-810-20 型机，和拉马努金公式（LM）（见 5.5 的 6.（2）），将 π 算到小数点后 201 326 551 位，用去 5 小时 57（一说 27）分钟。为了打印出这个约 2 亿位的 π 值，共用打印纸 40 366 张，装了 20 箱，用去了 27 小时 17 分钟。

在日本人拼命算 π 的同时，美国也在为打破世界纪录冲刺。1989 年，出生在苏联的、美国哥伦比亚大学的达维德·丘德诺夫斯基（1933～），和格雷戈里·丘德诺夫斯基（1938～）兄弟，将“LM”改良为“丘德诺夫斯基公式”（简称“QD”）

$$1/\pi=12\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n(6n)!\ (13\ 591\ 409+545\ 140\ 134n)]$$
$$/[(3n)!\ (n!)^3(640\ 320^{3n+3/2})]$$

用“QD”每计算一项可以得到 π 的 15 位十进制精度，就是能对计算结果增加 14 个准确数字。他们于同年 5 月用明尼苏达超级电脑中心的 CRAY-2 型和纽约 IBM 华特研究中心的 IBM-3900-VF 型两台电脑算 π 到 4.8 亿位小数，6 月又推进到

525 229 270 位小数。

兄弟俩出生在苏联基辅附近一个科学家和知识分子家庭，从小就接触数学。小 5 岁的弟弟格雷戈里更有过人的数学天分，16 岁的时候就发表数学论文。兄弟俩都进了大学攻读数学，并在乌克兰科学学院获得博士学位。但不幸的是，格雷戈里得了重症——肌无力而卧床。1976 年，父母想带病情非常严重的格雷戈里出国治疗，但苏联政府不但不帮忙，反而让“克格勃”对他的父母施以拳头。幸好格雷戈里的困境在国际数学界和政治界传开，引起了同情。在国际上不断高涨的抗议浪潮中，苏联政府终于在 1977 年批准他们出国。他们先移居巴黎，后来又到了美国。20 世纪 90 年代前期，住在曼哈顿上西区的公寓里。1997 年，兄弟俩在布鲁克林理工大学成立了数学和高等超级计算机研究所，于是兄弟俩携妻搬离曼哈顿。

兄弟俩在美国 20 年一直没有找到稳定的工作，但幸好在 1981 年格雷戈里获得了麦克阿瑟基金会的数学奖学金，这位天才才能连续多年领取丰厚的年俸，享有全额的医疗补助。他们一直用这笔钱和太太的部分薪水，从 20 世纪 80 年代末开始，进行耗能巨大的“m zero”——一部几乎占据整个公寓的超级电脑的制造、维修和升级，执著地研究圆周率。

此时，日本人也在争分夺秒。1989 年 7 月，金田康正和田村芳昭，用当时日本最快的日立 HITACHI-S-810-20 型超级计算机，算了 67 小时 13 分，把 π 算到 536 870 898（或约为 536 870 000）位小数；这个 π 值打破了上述丘德诺夫斯基兄弟的纪录，填满了 11 万张计算机打印纸。而同年 11 月又推进到 1 073 741 799 或 1 073 740 000 位小数，花费 74 小时 30 分钟，仍然用的是日立 HITACHI-S-810-20 型机。

但是，在美日算 π 的竞赛中，首先突破 10 亿位的却不是这两个日本人，而是比他们早约 2 个月的下述丘德诺夫斯基兄弟。

1989 年 9 月，美国商用电器公司即 IBM 公司自豪地宣布，在该公司工作的美国哥伦比亚大学科学家丘德诺夫斯基兄弟，在上个月用 CRAY-2 型机和 IBM-3090-VF 型机把 π 算到小数点后 1 011 196 691 位，首次突破 10 亿位大关。

这 10 亿位数，如果以平常的形式来印刷，长度将达到 1931km。这项纪录被载入当时的《吉尼斯世界纪录大全》。后来，他们还获得了第一届麦克阿瑟基金“天才奖”。

10. 1000 亿位也不难

1994 年 5 月，丘德诺夫斯基兄弟用“QD”将 π 算到 4 044 000 000位小数，创下新的纪录。“QD”的另一个更便于计算机编程的形式是

$$1/\pi=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}[(6n)!\ (13\,591\,409+545\,140\,134n)]\Big/[(3n)!\ (n!)^3(-640\,320)^{3n}]\right\}\Big/(426\,880\ \sqrt{10\,005})$$

兄弟俩用很聪明的模式实现了这个公式的计算，这个模式允许他们利用某种精度水平的结果去进行更高精度的计算。他们生活中有趣的轶事，可在波瑞斯通（R. Preston）发表在《纽约人》1992 年 3 月 2 卷 36～37 页上的《小数位数巨大的 π 值》中看到。其中之一是，他们的计算机……工作时就像一个大火炉，即使用十几台电风扇来降温，室内的温度仍然高达 90°F（约合 32℃）。用上述便于计算机编程的形式在 PLL-233 型机上计算 10 万位的 π 值，只要 5 秒钟。速度约为用马青公

式要 174 秒钟的 35 倍，使风光了 200 多年的马青公式更加黯然失色。

1995 年及以后几年，日本人奋起直追，最终屡破纪录，占了先机。1995 年 6 月，金田康正和他的助手高桥大介（Daisuke Takahashi），将 π 算到小数点后 3 221 225 466 位，逼近了丘氏兄弟头一年的纪录。他们用的计算机是 HITACHI-S-3800-480。

接着，在当年 8 月下旬，金田和高桥二人就用“Superπ”——专门算 π 的软件（10.2 的图 10-1），算到 4 294 967 287位——约 43 亿位，这就破了丘氏兄弟的纪录。这个软件是利用 CPU 的浮点运算能力来计算圆周率的，推出这个软件最主要的目的是，只用个人电脑就可把 π 算到小数点后第 3350 万位。

但是，1995 年 10 月 15 日英国广播公司却报道说，加拿大的一组科学家为了适应高科技发展的需要，使用当今世界上运算能力最强的计算机，计算了 56 个小时，把 π 值算到小数点后 42.949 672 86 亿位。而且说，这些数印在纸上，排列起来长达 804.5km。其他也有资料（例如《中等数学》2000 年 5 期 27 页）显示，加拿大的乔纳森·波尔文和彼德·波尔文在 1995 年用了 56 个小时，把 π 值算到小数点后 42.9 亿位。

上面这两组算 π 的位数和时间的雷同，究竟是巧合还是其中一则报道有误？

金田康正和高桥大介，又接着在同年 10 月算到 6 442 450 938位——约 64 亿位。速度更快的日立 HITACHI-S-3800-480型机，成了金田和高桥这次和其后几年算 π 的得力武器。

1996年，丘氏兄弟又算到80亿位。

新华社东京1997年7月28日电称："日本东京大学大型计算机中教授金田康正和助手高桥大介，最近将圆周率演算到了小数点后515.396亿位，大大超过了他们两年前创造的64亿位的世界纪录"，他们用的电子计算机是HITACHI SR2201。"今年6月初进行第一次演算时间用了29个小时，7月进行第二次演算时用了37个小时"。

到了1999年4月，金田康正和高桥大介再将π推进到68 719 470 000——约687亿位。

π的较新世界纪录，是金田康正和老搭档高桥大介于1999年9月18日，用HITACHI-SR-8000型超级电子计算机创造的，位数为$2^{36}=206\ 158\ 430\ 208$位——约2000亿位。他们是在东京大学的IT中心，用高斯-勒让德算法即AGM（Arithmetic-Geometric Mean）编写的程序，每迭代一次可得双倍十进制精度。

这台计算机的存储容量为1万亿位，每秒可执行1万亿次浮点运算。从日本当地时间19点00分52秒开始，用了37小时21分4秒算得。其后，他们又将上述结果与1999年6月27日用前述两位波尔文四次迭代式计算了46小时7分的结果相比较，发现最后45位小数不同。因此，他们将小数点后206 158 430 000位π值作为最终计算结果。它的最后20位数字是21 144 966 875 515 730 964。

这约2062亿位π值是什么概念呢？假设一本书可印出200万位数字，那么，印出约2062亿位数字则约要10万本书——一个中小型图书馆的藏书！

11. "惊天大数" 12 411 亿

不过，上述惊人的纪录，在3年后就被打破。2002年12月6日，东京大学信息基础（IT）中心和日立制作所的联合研究小组宣布，该中心科学家金田康正等人，与日立制作所的员工合作，利用日立制作所的超并行超级电脑系统日立SR-8000-MPP，净耗时400多小时，算出了12 411亿位π值。这个电脑系统由144台电脑通过高速通信线路连接而成，1秒钟之内完成2万亿次计算，当时计算能力居世界第26位。主要计算和验算共用约600小时。其间曾停止过计算，而所有的计算是在11月24日完成的。

这次计算改善并采用了名为"分解有理数化法"（DRM法）的计算方法。

据说，结果得到π值的第1万亿位数是2，第12 411亿位数为5。

有人计算过，这些π值，如果一秒钟读一位数，大约要4万年后才能读完。如果将它们全部写到厚0.1mm的纸上，每张写1万位，这些纸张堆起来将高达12 411m，比珠穆朗玛峰还高。

5.6 从星条旗到芝麻——概率法算π及数值

"π在这个最料想不到的场合跳了出来"！这是在乌克兰出生的美国科普作家盖莫夫（George Gamow，1904～1968）在《从一到无穷大——科学中的事实和臆测》中对布丰法算π的感叹。下面来看一看π是怎样"跳了出来"的。

1. 星条旗上掷短针——布丰法游戏算 π

1777 年的一天，一位法国人家里高朋满座。他们不仅是来赴宴的，而且是来“做游戏”的。只见 70 高龄的主人将一张画着一组等距离平行线的纸铺在桌子上，把一堆每根长为平行线距离一半的小针递给客人。“请诸位把针一根根往纸上扔……”客人们不知主人葫芦里卖的是什么药，但还是“客随主便”。最后，主人数了数，共扔针 2212 次，其中与平行线相交 704 次。2212/704 = 3.142，“这就是圆周率”。啊——客人们大吃一惊，圆周率竟在一场游戏之中。不过，美国科普作家盖莫夫却建议在星条旗的平行线上用火柴做这个游戏。

这个主人就是首先用概率法（一种实验法）求 π 的法国博物学、数学家布丰（1707～1788），他的另一个名字是勒克朗谢（George Louis Leclerc）。因此，这个实验也称布丰实验，而这类问题也称为布丰问题。

我们先给布丰实验一个特殊通俗的说明。

假设图 5-21 中平行线距为4 厘米，针 AB 长为 2 厘米。将针任意掷向平行线时，可能相交——有一端碰到平行线也算相交，也可能不相交。问题是，大量多次投掷针时，投掷总次数 n 与相交次数 k 的比值即 n/k = ?

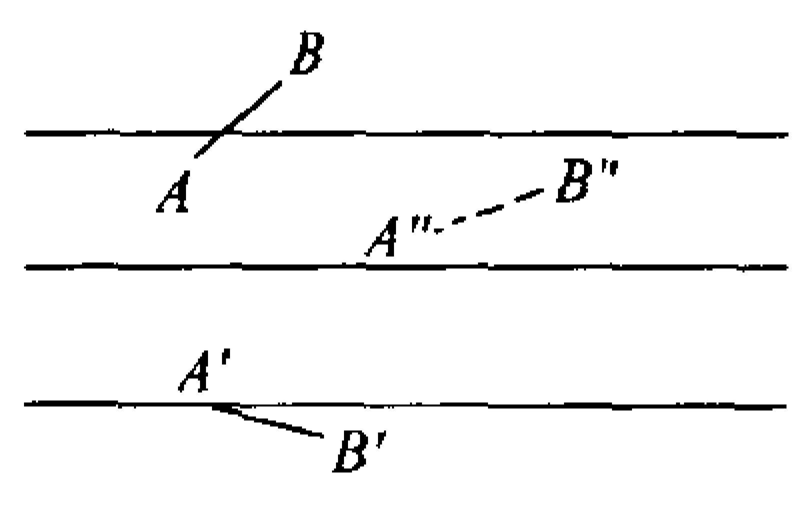


图 5-21

根据“公平竞争”的原则，显然每 1 毫米长的针与直线相交的次数为 $k/20$，每 2 毫米则为 $2k/20$，等等。也就是说，针与直线可能相交的次数与针的长度成正比。当然，这个结论对图 5-22 所表示的任意形状的、总长为 2 厘米的针也适用。

不过，弯针可能有几处和直线相交，就必须把每个交点都算进去。

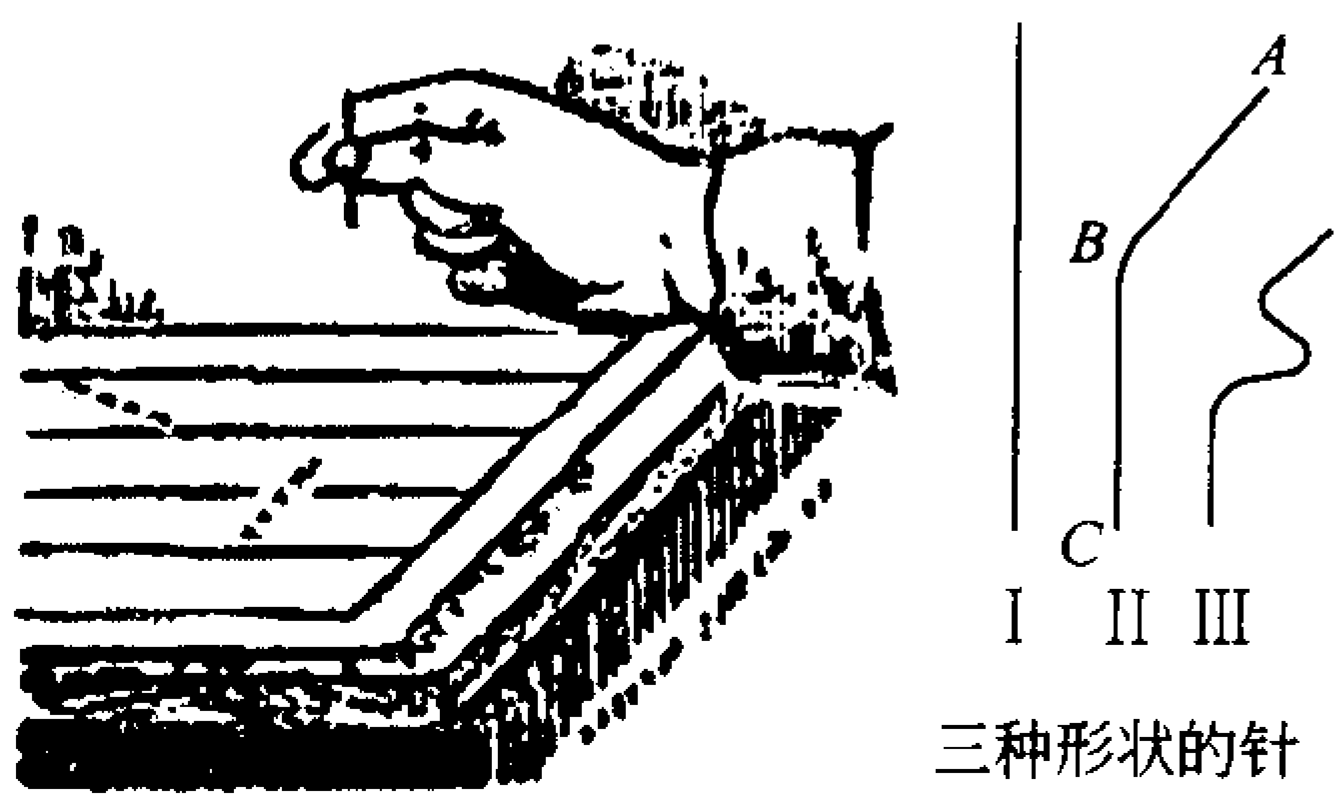


图 5-22　布丰的掷针实验

现在，改用直径 4 厘米、周长 4π 厘米的圆形针，仍然将它投向上述平行线。显然，每次投掷的必然结果是，和两条直线都相交（相切也视为相交）。如果投掷 n 次，则相交次数必为 $2n$ 次。对比以上两次实验，并用到上述可能相交的次数与长度成正比的结论，就有 $2/4\pi = k/2n$，也就是 $n/k = \pi$。看，π 的确在这里“跳了出来”！

1777 年，布丰在 1760 年写成的《或然算术试验》出版，书中给出了掷针问题一般情况的解答。如果向画有等距离且距离为 a 的一组平行线投掷长为 l（$l < a$）的直针，那么，直针与直线相交的概率为 $p = 2l/a\pi$。以下证明这一结论。

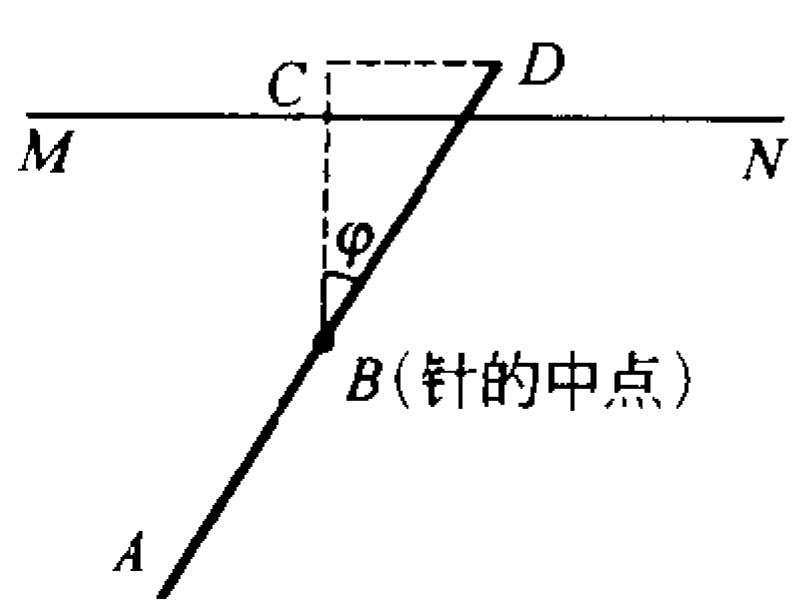


图 5-23

如图 5-23，设 AD 与平行线中的任意一条 MN 相交，显然针不可能和两条直线相交，只有当且仅当 $s = BC \leqslant$

$(l\sin\varphi)/2$ 的时候，针和 MN 才相交。

如图 5-24 建立一个 s 随 φ 变化的坐标系，同时画一个长为 π，宽为 $a/2$ 的矩形。那么，这个矩形的面积表示什么呢？不管线与针相不相交，都有 $s=BC\leqslant a/2$ 和 $\varphi\leqslant\pi$。所以，矩形面积表示相交和不相交次数的和即总投掷次数。

再在图 5-24 所示的位置作正弦曲线 $s=(l\sin\varphi)/2$ 的半周。显然，阴影部分内的点就表示线与针相交，而阴影部分的面积就表示相交的次数。这就得到概率 $p=k/n$ = 阴影面积/矩形面积 $=\int_0^{\pi}(l/2)d\varphi\sin\varphi/(a\pi/2)=2l/a\pi$。就是 $p=k/n=2l/a\pi$，也就证明了前述 $p=2l/a\pi$，并且得到投针法求 π 的一般公式 $\pi=2nl/ak$。此时，如果像前面那样假设 $2l=a$，就得到 $\pi=n/k$，于是 $\pi=2212/704=3.142$。

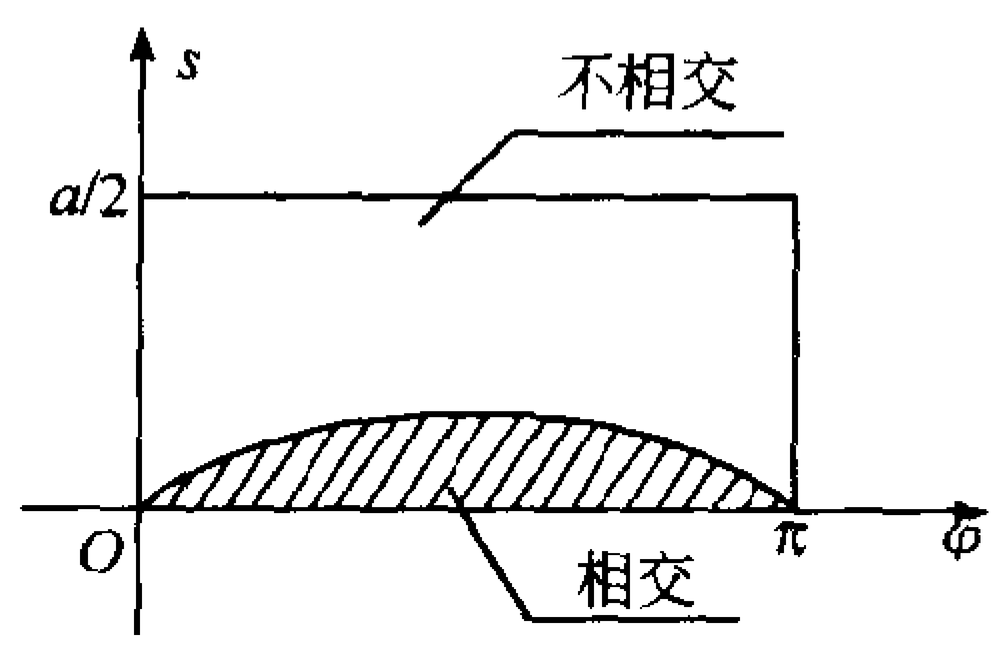


图 5-24

由于随着投掷次数的增加，可以得到越来越准确的 π 值，所以 100 多年来不少人进行过实验。其中著名的如表 5-3 所列，表中沃尔夫在苏黎世投掷时，针长 36 毫米。

不过，不管其中意大利拉兹里尼（Lazzerini）是否真的投过针，对他那么少的次数就得到这么准确的 π 值，一直有人持怀疑态度。

甚至过了近一个世纪，美国犹他州奥格登的国立韦伯大学的 L. 巴杰，都还在表示质疑。这类质疑的文章《对 π 实验的不实的计算》，发表在 1994 年 8 月 1 日的《自然杂志》第 370 卷第 323 页上，作者是 J. 马多克。

值得注意的是，从表 5-3 可以看出，用这种方法求得 π 的

精确度与投掷次数并不成“正比”。这又是为什么呢？这涉及一个重要的数学问题——最优停止问题，也就是投到多少次停止，才可以获得较优的 π 的估计值问题。需要了解详细情况的读者，请阅读相关书籍。

表 5-3

时　间	实 验 人	次　数	π 值
1777	法国布丰	投 2212 交 704	3.142
19 世纪中叶	英国德·摩尔根等	投 600	3.137
1850 或 1853	瑞士沃尔夫	投 5000 交 2532	3.1596
1855	英国亨利·史密斯	投 3204 或 3200	3.1553
1894	英国福克斯	投 1120 或 1100	3.1419
1901	意大利拉兹里尼	投 3408 交 1808 或 2169	3.141 592 9

布丰实验引出过很多数学和其他学科的成果。例如，著名的蒙特卡罗方法即统计方法，它的滥觞就是布丰实验。由于布丰实验“这张旧船票”能够登上许多“客船”——现实的理论和实践意义都十分广泛重大，因此经常被许多文献提到。

2. 高斯法——数格点照样算 π

高斯给出的概率求 π 法如图 5-25 所示。

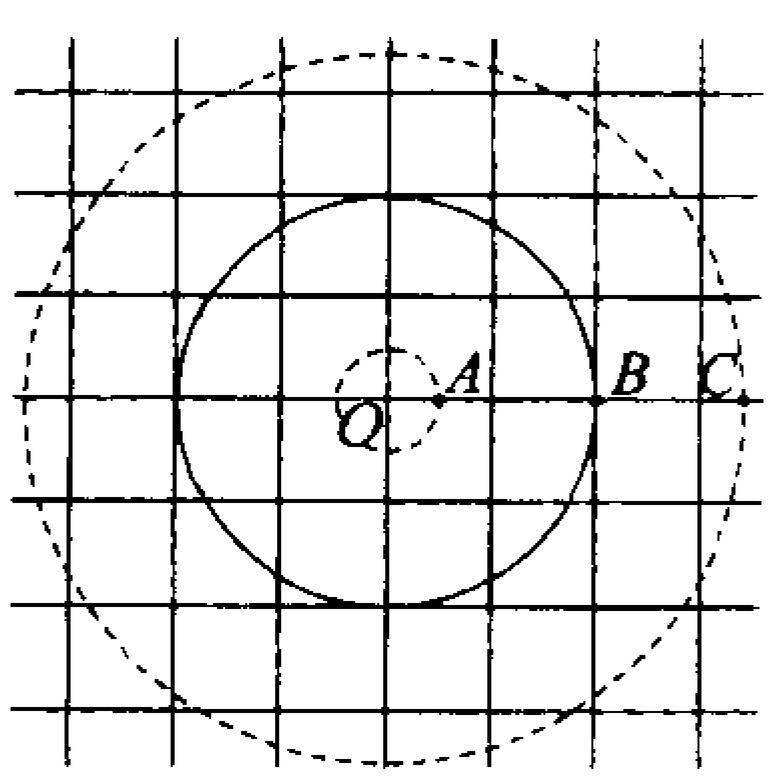


图 5-25

将半径 OB 为整数 r 的圆画在方格纸上，数出圆内和圆周上的格点（指经过各整数直线的交点）总数之和 $f(r)$，这样，就有 $\pi=f(r)/r^2$。

例如，在图 5-25 中，$OB=r=2$，就可以数出 $f(r)=13$。此时，不难算

出 $\pi=13/2^2=3.25$。下面给出证明。

显然，那些与以 OB 为半径的圆周相交的方格，一定在这样两个虚线圆周所组成的圆环内：一个是 $r-\sqrt{r}$（即 OA）为半径的圆，另一个是 $r+\sqrt{r}$（即 OC）为半径的圆。不难算出，这个圆环的面积为 $4\pi r\sqrt{r}$。显然，$|f(r)-\pi r^2|<4\pi r\sqrt{r}$。

这个式子就是 $|f(r)/r^2-\pi|<4\pi/\sqrt{r}$。

当 $r\to\infty$ 的时候，$4\pi/\sqrt{r}$ 的极限为 0，由此就可以得到 $f(r)/r^2-\pi=0$。于是，$\pi=f(r)/r^2$ 就得到证明。

表 5-4 为高斯的部分实验结果。

表 5-4

r	r^2	$f(r)$	$\pi=f(r)/r^2$	相对误差
2	2^2	13	3.25	+3.45%
3	3^3	29	3.222	+2.56%
10	10^2	317	3.17	+0.90%
20	$4\cdot10^2$	1257	3.1425	+0.03%
30	$9\cdot10^2$	2821	3.1344	−0.23%
100	10^4	31 417	3.1417	+0.003%
200	$4\cdot10^4$	25 629	3.1407	−0.028%
300	$9\cdot10^4$	282 697	3.1411	−0.016%

格点概率法还有本质相同的另外一种叙述。如图 5-26 画整数 r 为半径的圆。设圆内（含圆周）的格点（两个坐标均为整数的点）数为 $f(r)$，可以将 $f(r)$ 看作圆面积 S 的近似值，而圆面积 $S=\pi r^2$，所以有近似关系 $\pi=f(r)/r^2$。用它也可以求得近似 π 值。

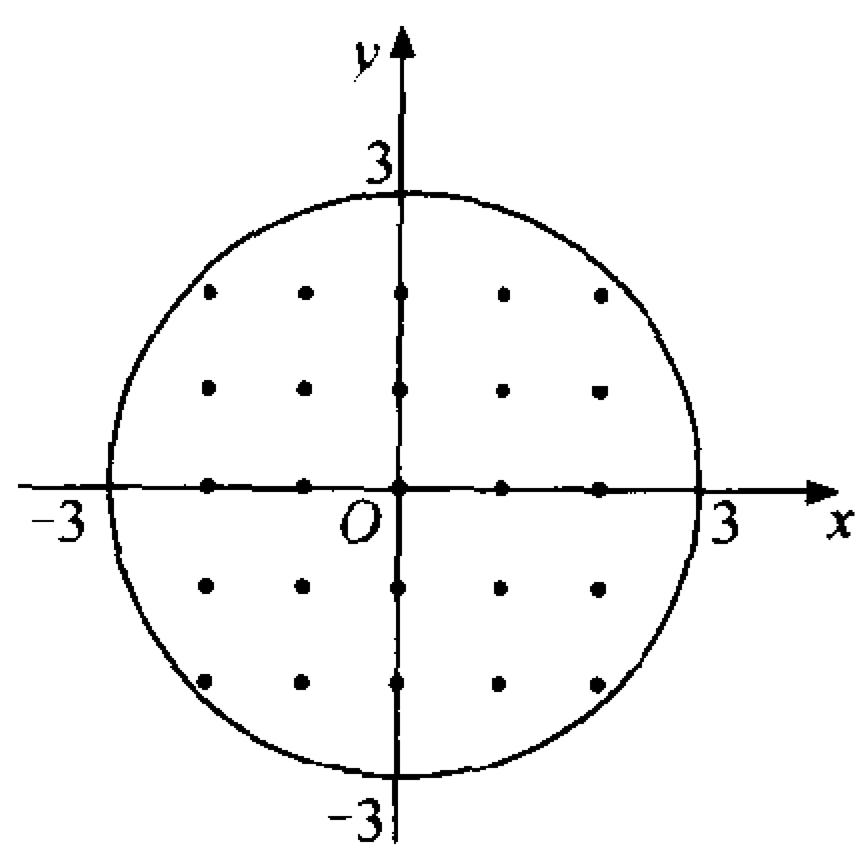


图 5-26

例如，在图 5-26 中 $r=3$，可以算出或数出格点数 f（3）$=29$，这时就

可以得到 $\pi = 29/3^2 = 3.222$。

1960 年，苏联数学家嘎乌斯波莫（Гаусбом），给出这种用圆内格点实验求 π 的方法。

3. 小正数法——任写“小数”同样算 π

随机写出两个小于 1 的正数 x 和 y，它们与数 1 在一起正好构成一个锐角三角形三边的概率 $p = 1 - \pi/4$，由此就可以求得 π 值。例如，我们随机写出 100 组（每组两个）小于 1 的正数，其中 n 组“能”与 1 构成一个锐角三角形的三边，m 组“不能”；则“能”的概率是 $p = n/(m+n) = 1 - \pi/4$。例如，当 $n = 21$ 时，$m = 79$，就可以得到

$$\pi = 4m/(m+n) = 4 \cdot 79/(79+21) = 3.16$$

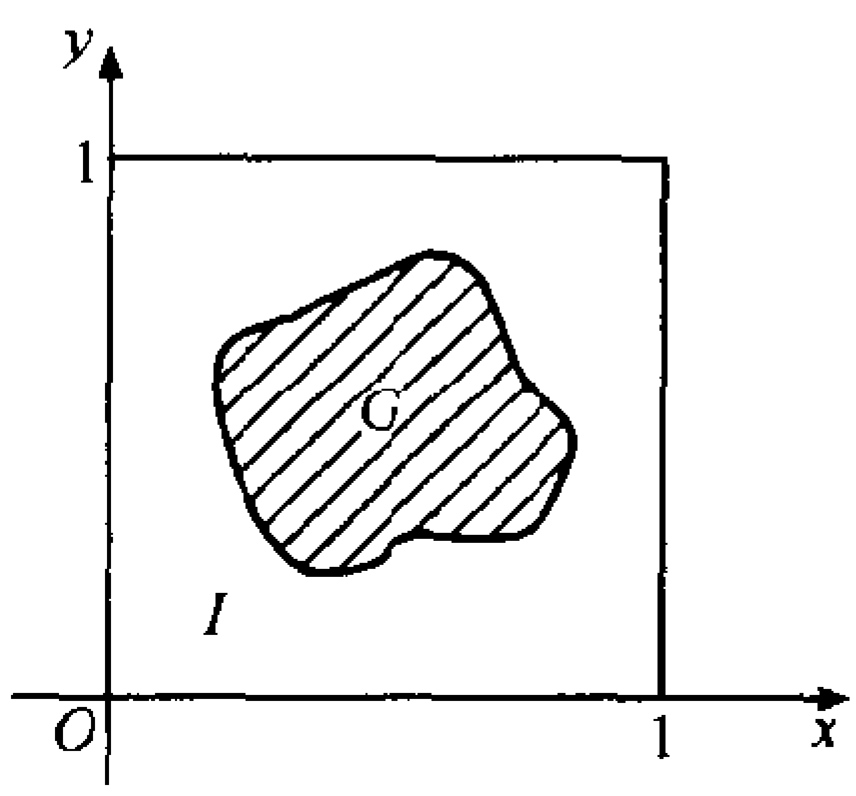


图 5-27

下面给出这一方法的证明。在图 5-27 中，点 (x, y) 是在 0 与 1 之间随机选取的，所以点 (x, y) 必然均匀分布在面积为 S_I 的单位正方形 I 的内部。如果符合条件——与 1 正好构成一锐角三角形的三边的点落在面积为 S_G 的阴影区域 G 内，那么根据“机会均等”的原则，所求的概率 $p = S_G/S_I$。

现在，假设以 x，y，1 为三边的锐角三角形 ABC 如图 5-28，其中 $\angle C$ 对应于最大的边 1。因为三角形两边之和大于第三边，而且 x，y 均为正数。所以

$$x + y > 1 \tag{5.1}$$

显然，满足（5.1）的点必然在图5-29中直线 $x + y = 1$ 的右

上方。又因为$\angle C$是锐角，根据余弦定理，就得到

$$1^2=x^2+y^2-2xy\cos C<x^2+y^2,\ \text{即}\ x^2+y^2>1 \quad (5.2)$$

显然，满足（5.2）的点在圆$x^2+y^2=1$以外。由此可知，满足（5.1）和（5.2）或代表它们且在I内的区域是阴影区域G。而G的曲边周界，是$x^2+y^2=1$这个圆在一象限内的那1/4圆周。

所以，$S_G=S_I-S_{圆}/4=1-\pi/4$，所求的概率$p=S_G/S_I=1-\pi/4$。这就证明了前面的结论。

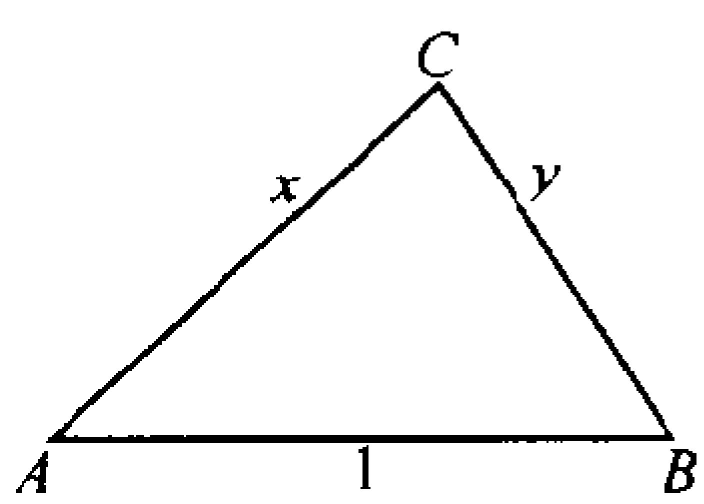


图 5-28

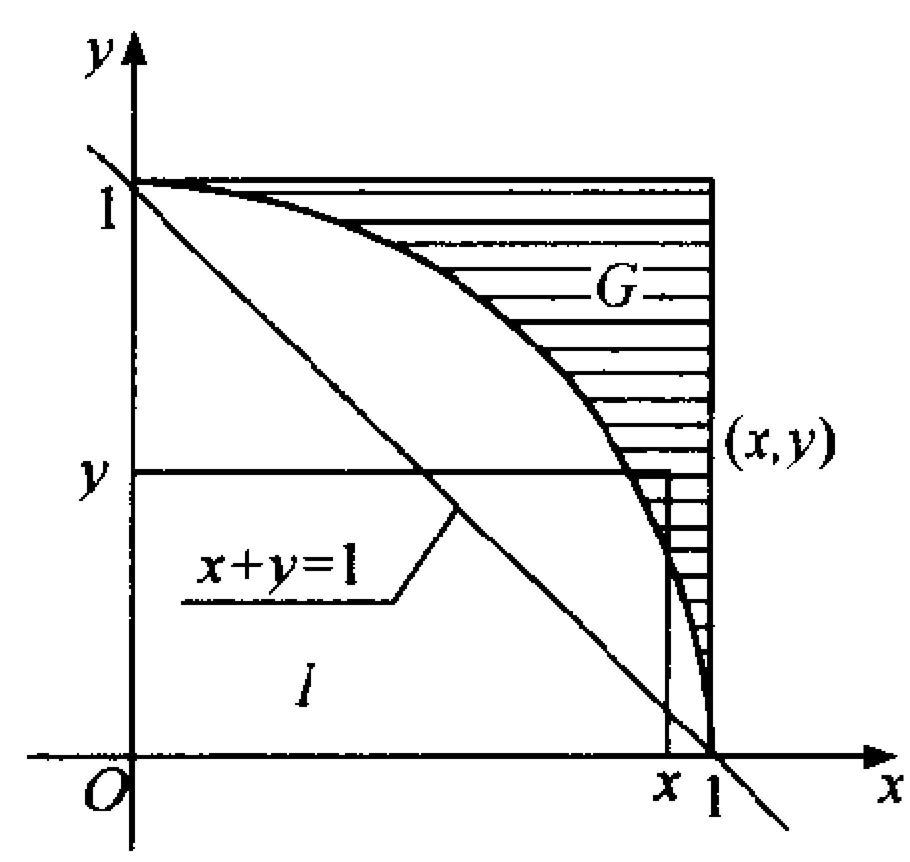


图 5-29

4. 互素法——写自然数也能算 π

约 1904 年，数学家查尔特斯（R.Chartres）叫了 50 个学生，让每个学生任写 5 对自然数，他经过计算，其中有 154 对互素，即互素的概率为 154/250=61.6%，可由此算 π。

研究表明，理论上任意两个自然数互素的概率为$6/\pi^2$；那么，就可以通过任写自然数及这一公式来求得 π 值。例如，由查尔特斯上述实验得$6/\pi^2=61.6\%$，于是$\pi=3.12\cdots$。

这真是奇妙无比——π 又“跳了出来”!

5. 请木棍来帮忙——广袤大地也算 π

假设在大地上插满木棍或其他棍子，并且整齐地排成一个

矩阵，就像果园里种得很整齐的苹果树一样。然后任意选取两根木棍，把它们之间的两点联结成直线。那么，直线上没有其他木棍的概率为 $6/\pi^2$。多次进行这样的选取，就可以根据选取的次数 m，没有其他木棍的次数 n，来算得 π 值了。具体算式是 $6/\pi^2 = n/m$，和“互素法”相同。

您看，在广袤的大地上也算出了 π！这种方法，记载于菲因（John Phin）在 1912 年出版的《科学的七大荒唐事》（The Seven Follies of Science）一书中。

6. 不掷短针掷芝麻——又一游戏算 π

画一个半径约 10 厘米的圆和它的外切正方形，再将一大把芝麻一粒粒或一批批掷向上述图形，最后数一数圆内的芝麻数和正方形内所有的芝麻总数，并用前一个数除以后一个数的商，再乘以 4，就可以得到近似 π 值。有人做过一次实验，分别数得以上两个数为 1571 和 2001，由此可算得 $\pi = 4 \cdot 1571/2001 = 3.1404$。

这种方法的道理显而易见：圆面积正好是正方形面积的 $\pi/4$ 倍，而投在每单位面积上芝麻的概率是相等的。如果把圆和它的外切正方形画得大一些，我们可以改用更为方便的物体，例如用较大的米粒来代替芝麻。

5.7 “单摆公式”显神通——物理实验法算 π

物理实验法算 π 的方法很多，像 5.2 的2.(18)中谈到邢云路和谈泰用测圆周长和直径来算 π 值的方法就是一种。这里再介绍一种。

由单摆振动周期公式 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 得 $\pi=T\sqrt{g/l}/2$。一位学者测得当地重力加速度 $g=9.794$ 米/秒^2，摆长 $l=0.8755$ 米，单摆振动周期 $T=1.878$ 秒，于是求得 $\pi=3.1406\approx3.141$。

5.8 并不都要从“1”开始——计算 π 的单个数字

在德国哥廷根大学的档案馆里，保存着希尔伯特的三个笔记本，其中两本是他在 1900 年以前写的。笔记本中记录了他思考过的成百上千个各类问题。其中一些问题，构成了他于 1900 年在巴黎召开的第二次国际数学家大会上，所作演讲中提出的 23 个著名问题的基础。这成百上千个问题中的一个是：在 π 值 3.141 592…中，是否会出现…999 999 999…？

由此可见，在 19 至 20 世纪之交，已有人关注 π 在小数点后任意位数上的值了。

类似希尔伯特的问题，我们也可以提一个：π 在小数点后 1 万亿位上的数是几？

只关注 π 小数点后第几位或一些位的数，这就提出了“计算 π 的单个数字”问题。而这又是一个困扰了人们近一个世纪的难题，直到 1995 年才有人开始解决。

在 1995 年以前，人们要知道 π 的第 d 个数字，就必须算出第 d 个数字及之前的所有数字。例如，要知道 π 的第 6 位数字 9，就必须算出前 6 个数字“3.141 59”。而想不算出“3.1415”而知道“9”是不可能的——不管你采用何种公式。然而，这种情况在 1995 年以后已不复存在。

1995年，美国的达维德·贝利和加拿大的彼德·波尔文、西蒙·普洛菲（Simon Plouffe）发表了一个以三人姓氏命名的算法，简称为BBP公式

(1) $\pi=\sum_{i=0}^{\infty}(1/16^i)[4/(8i+1)-2/(8i+4)-1/(8i+5)-1/(8i+6)]$

它打破了传统的算π法，可以计算π的16进制数字任意第d位而不用算前面的$d-1$位。基于这个公式算出π的16进制数字如表5-5所示。法布里斯·贝纳德（Fabrice Bellard），在1992年用这种方法算出π的16进制的第1000亿位开始的数字是9C381 872D2 7596F 81D0E…。

表5-5

位置	从这位置开始的十六进制数字
10^6位	26C65 E52CB 4593
10^7位	17AF5 863EF ED8D
10^8位	ECB84 0E219 26EC
10^9位	85895 585A0 428B
10^{10}位	921C7 3C683 8FB2

π^2类似（1）的公式是用“PSLQ”——寻找整数关系算法得到的

$$\pi^2=\sum_{i=0}^{\infty}(1/16^i)[16/(8i+1)^2-16/(8i+2)^2-8/(8i+3)^2-16/(8i+4)^2-4/(8i+5)^2-4/(8i+6)^2+2/(8i+7)^2]$$

1997年，法布里斯·贝纳德找到了一个算π比BBP快40%的公式

(2) $\pi=\sum_{n=0}^{\infty}(-1/1024)^n[-32/(4n+1)-1/(4n+3)+$

$256/(10n+1)-64/(10n+3)-4/(10n+5)-4/(10n+7)+1/(10n+9)]/64$

上述（1）和（2）也可像普通公式那样算出π的前若干位，当然它们算出的也是16进制数字。对此有更多兴趣的读者，可参看《数学译林》杂志1997年3期的《圆周率的探索》一文。让人费解的是，这些并不复杂的公式所依据的简单模式在几个世纪前已经知道，但这些公式却长期无人发现，这是为什么？这个文献中有一部分答案。

在1996年10月，法布里斯·贝纳德又利用西蒙·普洛菲和两位波尔文发现的公式$\pi=\sum_{i=0}^{\infty}(1/16^i)[4/(8i+1)-2/(8i+4)-1/(8i+5)-1/(8i+6)]$，算出了16进制的第4000亿位π值。

◎第六章

变"简"为"繁"出奇制胜——π的无穷表达式

数学，把某个确定的数，例如二项式化作无穷级数，即化作某种不确定的东西，从人的常识来说，这是荒谬的举动。但是，如果没有无穷级数和二项式定理，那我们能走多远呢？

——恩格斯

是的，如果没有把π化为各种"无穷"，我们就是跛子走路——寸步难行。π的无穷表达式主要指无限连分式（数）、无穷乘积、无穷级数、反正切式等。本来反正切式不是"无穷"的"样子"，但在用它算π时，常用詹姆斯·格雷戈里的 $\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - \cdots$，将它展开成无穷级数来进行计算，所以我们仍然称反正切式为无穷表达式。

6.1 神奇美妙的无限连分式

π可以写成一个无限简单连分数：π = [3，7，15，1，292，1，1，1，2，1，3，1，14，2，1，1，2，2，2，2，1，

84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1, …]。这个连分数是沃利斯在17世纪中叶根据鲁道夫算出的36位π值得到的。

不过，将π展开成无限简单连分式并不是从沃利斯开始的。例如，1612年，意大利数学家卡塔尔迪（1548或1552～1626）就曾研究过。他首次借助连分数解决了求平方根的问题，并得到π= [3, 7, 15, 1, …]。此外，有人猜测祖冲之也有可能研究过连分数，并求过π的连分数表达式，但没确凿记载。

π的连分数并不限于简单连分数。沃利斯1655年在伦敦出版的《无穷算术》中，就载有布龙克尔为解答他的质疑，并由他的无穷乘积式出发思考得到的连分数

$$4/\pi=1+\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\cdots \qquad 或 \quad \pi/4=\frac{1}{1+}\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\cdots$$

这些连分数显然不是简单连分数。后一个式子也被称为欧拉式，欧拉也独立发现过。

π的小数值是“杂乱无章”的，但在以上两个式子中，却呈现有规律的从1开始的连续奇数的平方，使人觉得似乎其中饱藏奥秘。这是一个数学神奇美的范例。

6.2 和谐“奇怪”的无穷乘积

16世纪之前，求π所用的古典法的优点是直观易懂，不需另辟新路，缺点是每多得一位π值都要进行庞杂的运算，以致π值的位数难以提高。在这种情况下，数学家们必须另辟蹊径。随着代数学、三角学的日渐成熟，不同于古典法的无穷乘积法应运而生。

1. 韦达首开先河

法国数学家韦达在这方面做了开创性的工作。他在1579年的《数学定律，应用于三角形》一书中，通过考察单位圆内的一系列内接正多边形后，就得到韦达式

$$2/\pi=(\sqrt{2}/2)(\sqrt{2+\sqrt{2}}/2)(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}/2)\cdots$$

这个式子同5.3的10. 提到的他的式子，用它就可以直接算π。

其后，欧拉发现 $A=\sin A/\cos(A/2)\cdot\cos(A/4)\cdot\cos(A/8)\cdots$（式子中的 $A<\pi$）。设式中 $A=\pi/2$，就有 $\pi/2=1/\cos(\pi/2)\cdot\cos(\pi/4)\cdot\cos(\pi/8)\cdots$。这个式子，与韦达式本质相同。

1593年，韦达用他的无穷乘积将π算到17位小数。虽然这个纪录并不领先，但是他不用古典法而用无穷乘积法，由此开辟了其后人们用数学分析法求π的新道路。

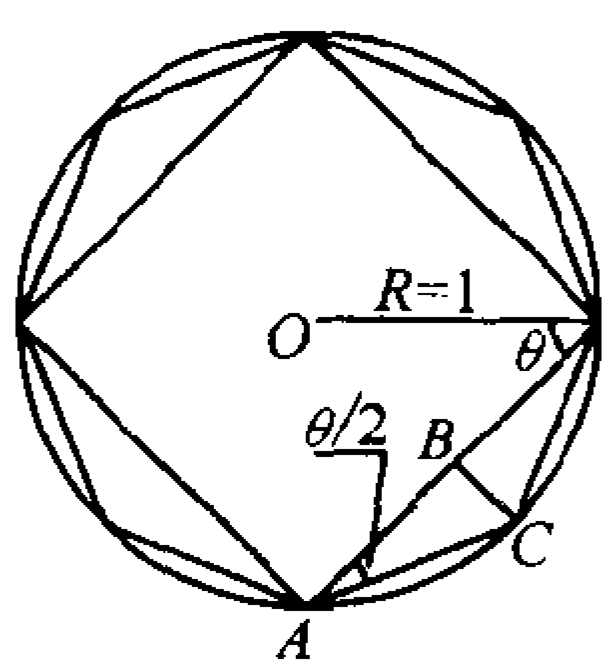


图 6-1

以下介绍证明韦达式的多种方法中比较简单的几何法。在图6-1所表示的单位圆中，圆内接正方形的边长为$\sqrt{2}$即 $\sec\theta$（$\theta=\pi/4$）。对于圆内接正八边形，不难在直角三角形 ABC 中算出 $\angle BAC=\theta/2$，$AC=\sec\theta\cdot\sec(\theta/2)/2$。所以，这个八边形的两边之和为 $\sec\theta\cdot\sec(\theta/2)$。接下去，用同样的方法可以算得圆内接正16边形的4边之和为 $\sec\theta\cdot\sec(\theta/2)\cdot\sec(\theta/4)$，等等。显然，由图6-1可看出，当圆内接正多边形的边数无限增多时，最终结果就是1/4个圆周长 $=\pi/2$。这样，就有

$$\sec\theta\cdot\sec(\theta/2)\cdot\sec(\theta/4)\cdots=\pi/2$$

就是

$$2/\pi=\cos\theta\cdot\cos(\theta/2)\cdot\cos(\theta/4)\cdots$$

再将 $\cos\theta=\sqrt{2}/2$，$\cos(\theta/2)=\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$，$\cos(\theta/4)=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}/2$，……代入上面的式子，就证明了韦达式。

2. 沃利斯接过接力棒

1650年，沃利斯成功地解决了由函数 $y=(1-x^2)^n$（n 为自然数）所给定曲线下面积的求法问题。而在求单位圆 $x^2+y^2=1$ 面积的1/4即 $\pi/4$ 的时候，他遇到了等价的积分 $\int_0^1(1-x^2)^{1/2}dx$。但他不会计算这一积分，因为当时微积分尚未成熟，他也不知道一般形式的二项式定理，只好借助于其他方法。首先，他分别算出了 $\int_0^1(1-x^2)^0dx=1$，$\int_0^1(1-x^2)^1dx=2/3$，$\int_0^1(1-x^2)^2dx=8/15$，$\int_0^1(1-x^2)^3dx=48/105$，…。接着，由此考虑对 $n=0$，1，2，3，…即上述计算结果的一般规律，再对 $n=1/2$ 时巧妙地用这一规律进行插值。最后，借助于上述类比、归纳和极限方法，利用一连串的复杂推理，终于得到 $\int_0^1(1-x^2)^{1/2}dx=\pi/4=2\cdot4\cdot4\cdot6\cdots/(3\cdot3\cdot5\cdot5\cdots)$。这一发现也载于他的《无穷算术》中。

由于沃利斯在上述推理中巧妙地将其序列扩展到了无穷，使他成为牛顿和莱布尼茨之前把分析方法引入微积分方面工作做得最多的人。用“∞”表示无穷大也是他首创的。

沃利斯式也是一个和谐优美的式子。同时，一个超越数 π 竟和所有的自然数神奇地以让人过目不忘的形式联系在一起，

真让人有些不可思议。怪不得美国数学史家伊夫斯称它为“奇怪的表达式”。

3. 日本人也不甘落后

日本数学家渡边一（1767～1839）死后，日本1853年编了《当用算法》一书。书中有一个类似韦达公式的式子：$n\to\infty$时，

$\pi/4=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}\cdot 2^n$（根号下 $n+2$ 个 2）。这也是一个无穷乘积。下面给出证明：

对圆内接正 2^3 边形：$2\cos\pi/2^{3-1}=\sqrt{2}$（根号下 $3-2$ 个 2），

对圆内接正 2^4 边形：$2\cos\pi/2^{4-1}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$（根号下 $4-2$ 个 2），

……

对圆内接正 2^{n+3}边形：$2\cos\pi/2^{n+2}=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}$（根号下 $n+1$ 个 2），

……

此时，对 $2\sin\pi/2^{n+3}$用半角公式 $\sin\alpha/2=\sqrt{(1-\cos\alpha)/2}$，就有

$$2\sin\pi/2^{n+3}=\sqrt{[1-(\cos\pi/2^{n+2})]/2}=\sqrt{2[1-(\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}/2)]}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$ （根号下 $n+2$ 个 2）

就是 $2\sin\pi/2^{n+3}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$（根号下 $n+2$ 个 2）。将此式两边同乘 2^n并变形后有

$$(\sin\pi/2^{n+3})/(\pi/2^{n+3})=2^{n+2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}/\pi$$

（根号下 $n+2$ 个 2）

当 $n\to\infty$的时候，上式左端极限为 1。由此得到 $n\to\infty$的时候

$$\pi/4=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}\cdot 2^n$$（根号下 $n+2$ 个 2）

1856 年，日本数学家石黑信基（1836～1869）发现了一个“求 π 术”。把它翻译成现代符号就是 $\pi=2\{2\cdot4\cdot6\cdot2n\cdots/[3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)]\}^2\cdot(2n+1)$。它与沃利斯式相同。

1857 年，日本数学家斋藤宜义（1816～1889）曾发现一个求椭圆周长的公式，如果设式子中椭圆的长短半轴相同，也可以得到沃利斯式。

1858 年日本还有一个式子：$[1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdots/(2\cdot2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots)]\cdot$圆周＝直径。只要将式子中的“圆周”换为 $2\pi R$，将“直径”换为 $2R$，也可以得到沃利斯式。

6.3 无穷级数变幻莫测

无穷级数千奇百怪、变幻莫测，其中最著名的是莱布尼茨式 $\pi/4=1-1/3+1/5-1/7+\cdots$。它被数学家们誉为“17 世纪最精彩的数学发现之一”。美籍华裔数学大师陈省身（1911～）则评价说，这个式子“实在美妙极了”。

1. 莱布尼茨到牛顿

我们所知道的莱布尼茨是微积分的发明人之一。沿用至今的“$\int$”和“$\mathrm{d}x$”都是他发明的，分别记于他在 1675 年 10 月 19 日和 1675 年 11 月 11 日的手稿之中。他还是一位哲学家和自然科学家，研究领域多达十来个。他虽然在 1673 年，即迟于詹姆斯·格雷戈里两年，才发现 $\arctan x$ 的展开式，但他并没像后

者那样坐失良机，而是别具慧眼地设 $x=\pi/4$，便得到美妙绝伦的莱布尼茨式。

微积分的另一发明者牛顿，在无穷级数研究上也颇有建树——实例是得到“三术”

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \cdots \quad (6.1)$$

$$\arcsin x = x + x^3/(2\cdot3) + 3x^5/(2\cdot4\cdot5) + 3\cdot5x^7/(2\cdot4\cdot6\cdot7) + \cdots \quad (6.2)$$

$$1-\cos x = x^2/2! - x^4/4! + x^6/6! - x^8/8! + \cdots \quad (6.3)$$

我们在5.4的2中提到，设式（6.2）中 $x=1/2$，就可以得到 $\pi/6=1/2+1/(2\cdot3\cdot2^3)+\cdots$，它和

$$\pi/3 = 1 + 1/(4\cdot3!) + 3^2/(4^2\cdot5!) + 3^2\cdot5^2/(4^3\cdot7!) + \cdots \quad (6.4)$$

是等效的。

2. 夏普、欧拉、斯坦维尔、普法夫的无穷级数

夏普（1653～1742）是用无穷级数 $\pi/6=1/\sqrt{3}\,[1-1/(3\cdot3)+1/(5\cdot3^2)-1/(7\cdot3^3)+\cdots]$ 把π算到72位的。他是一位英国数学家。

欧拉发现了许多π的无穷级数式，其中最著名的是 $\pi^2/6=1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots$，现简证如下：

用傅里叶级数将 $y=x^2$（$|x|\leqslant\pi$）展开，就得到

$y=x^2/3+4\,[(-\cos x)/1^2+(\cos 2x)/2^2+(\cos 3x)/3^2+\cdots]$

设这个式子中的 $x=\pi$，就得到 $\pi^2=\pi^2/3+4(1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots)$，由此式就证得了原式。

傅里叶级数优美和谐而应用广泛，所以他的论文被英国物理学、数学家麦克斯韦（1831～1879）称为“一首伟大的数学

的诗”。像莱布尼茨式或本书中的许多式子都可用它证得。

欧拉的其他无穷级数则记于表 6-1 中。

将 6.3 的 1 中牛顿的（6.2）式两边平方，就可以得到

$$(\arcsin x)^2 = x^2 + 2x^4/(3\cdot 2) + 2\cdot 4x^6/(3\cdot 5\cdot 3) + 2\cdot 4\cdot 6x^8/(3\cdot 5\cdot 7\cdot 4) + \cdots$$

这个式子是 1737 年欧拉得到的，也被称为斯坦维尔（J.de Stainville）公式。将它两边微分，就得到 $(\arcsin x)/\sqrt{1-x^2} = x + 2x^3/3 + 2\cdot 4x^5/(3\cdot 5) + 2\cdot 4\cdot 6x^7/(3\cdot 5\cdot 7) + \cdots$，这个式子称为普法夫公式。普法夫（1765～1825）是德国数学家。也可以把它写作 $A/\cos A = \sin A + 2\sin^3 A/3 + 2\cdot 4\sin^5 A/(3\cdot 5) + 2\cdot 4\cdot 6\sin^7 A/(3\cdot 5\cdot 7) + \cdots$，代入 $A = \pi/6$ 之后，又可以得到一个无穷级数

$$\pi/3\sqrt{3} = 1/2 + 2/(3\cdot 2^3) + 2\cdot 4/(3\cdot 5\cdot 2^5) + 2\cdot 4\cdot 6/(3\cdot 5\cdot 7\cdot 2^7) + \cdots。$$

3. 无穷级数在中国

法国耶稣会宣教师杜德美（1668 或 1670～1720 或 1730），于 1701 年来华当了清廷的官，带来了牛顿“三术”，但没有公式的证明。梅珏成在 1761 年所著的《赤水遗珍》中对此有所记载。该书首先翻译了杜德美介绍的牛顿三术。在第一术“求周径密率捷法”中说：“先将一三五七九等各自乘为屡次乘数；又将二三四五六七八九等数挨次两位相乘，又以四乘之为屡次除数，……”这段话用现在的式子表示，就是

$$\pi = 3 + 3/(4\cdot 2\cdot 3) + 3\cdot 3^2/(4^2\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5) + 3\cdot 3^2\cdot 5^2/(4^3\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7) + \cdots$$

容易看出此式可化成 6.3 的 1.（6.4）式。


图 6-2　明安图

杜德美还于 1708 年受康熙之命到冀北、辽东等地指导测绘地图。他将他的知识和方法传授给了蒙古族数学家明安图（？～约1765）（图 6-2）。明安图则在他花了 30 来年心血的《割圆密率捷法》中，也独立证明了 6.3 的 1.（6.4）式。所以（6.4）式也被称为明安图式。

不过，明安图大约在 1763 年完成前两卷初稿的、后来实际为四卷的这部书，在他生前并没有完稿。他死后，这部书才由他的学生陈际新、张肱即张良亭、他的儿子明新共同于 1774 年修改、续写完成。这部书中不但有牛顿三术的独立证明，还创造性地提出了六个公式，并与牛顿三术合称“九术”。

可惜的是，《割圆密率捷法》完成以后，却“为某氏所秘”，未能广为流传。到 19 世纪初，数学家们还只知道有九术的文字并转相传录，却不知道这本《割圆密率捷法》及九术的图。在惊叹九术的精深玄妙之时，还以为是杜德美从西方带来的。

1821 年，清代秀水数学家朱鸿和阳湖（即今苏州市）数学家董佑诚（1791～1823），才在钟祥李氏处得到这本书。这样，明安图的学术成果才公诸于世并流传下来，中国人才知道明安图是数学界的伟人。然而，项明达（1789～1850）、徐有壬（1800～1860）、丁取忠（1810～1877）、夏鸾翔（1823～1864）等数学家，应用了明安图的方法解决了许多数学问题，但却仍然认为这些方法是杜德美从西方带入中国的，从而称之

为"杜氏法"。对此，钱宝琮叹息道，项明达、徐有壬等"未免卤灭太甚"。

明安图在九术中，还用几何和代数方法解释其基本原理。他设 a 为"弧背"（"弧"在和算上的名称）、r 为半径、v 为正矢，得到

$$a^2=r\ [2v+\ (2v)^2/(3\cdot4r)+2^2(2v)^3/(3\cdot4\cdot5\cdot6r^2)+2^2\cdot3^2(2v)^4/(3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8r^3)+\cdots]$$

而清代乌程（即现湖州市）徐有壬则从此式以 $a=\pi r/3$，$2v=r$ 代入，得到

$$\pi^2/9=1/(3\cdot4)+2^2/(3\cdot4\cdot5\cdot6)+2^2\cdot3^2/(3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8)+\cdots \qquad (6.5)$$

据日本数学家林鹤一（1873～1935）及三上义夫等人的考证，(6.5) 式与日本人 Takebe Kendo 在 1772 年用另一种方法得到的一个式子相同。欧拉也曾于 1737 年得到这个式子。不过，在欧洲最早公布这一式子的却是斯坦维尔，时间是在 1815 年，这显然在明安图之后。因而这个式子决不可能由杜德美带到中国，而是明安图独立发现的。这段话，见三上义夫所著的《中国数学发展史》。

1819 年，董佑诚著的《割圆连比例图解》中，对九术的证法进行了简化。大约在同一年，朱鸿还用 6.3 的 1.（6.1）式算 π 至 40 位，但只有前 25 位正确。

项明达在 1843 年著有《象数一原》六卷，附有《椭圆求周术》一卷。后来，由他的好友、数学家戴煦（1805～1860）补图作解，并续成《象数一原》七卷本。但此书直到戴煦死后 28 年的 1888 年才开始出版。《椭圆求周术》中，提出了正确的椭圆周长计算公式，所用的方法与椭圆积分法一致，并据此

导出了π的倒数公式

$$1/\pi=[1-1/2^2-3/(2^2\cdot 4^2)-3^2\cdot 5/(2^2\cdot 4^2\cdot 6^2)-\cdots]/2$$

项明达称这结果“此盖奇偶相似、乘除互易，殆有自然之象数寓乎其间”，表现出他对数学中的对称、和谐的欣赏与探索自然奥秘的欢欣鼓舞、怡然自得之情。

项明达的这一式子展开之后，可以轻易证明它和沃利斯的无穷乘积是等效的。

这又是一个有趣的事实：π的一个无穷级数竟和一个无穷乘积等效。

此外，戴煦在他1852年完成的四卷本《外切密率》中，还得到与（詹姆斯·）格雷戈里级数等价的式子 $a=\tan a-\tan^3 a/3+\tan^5 a/5-\tan^7 a/7+\cdots$。

1854年，李善兰发表了数学书《方圆探幽》，他在书中用具有解析几何和微积分思想的“尖锥求积术”（简称“尖锥术”）巧妙地推导出圆面积公式时，得到

$$\pi/4=1-1/(2\cdot 3)-1/(2\cdot 4\cdot 5)-3/(2\cdot 4\cdot 6\cdot 7)-3\cdot 5/(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9)-\cdots$$

此式也可写作 $\pi/4=1-1/3!-3/5!-3^2\cdot 5/7!-3^2\cdot 5^2\cdot 7/9!-\cdots$。

下面简单叙述尖锥术在求圆面积中的作用。

图6-3所示1/4个单位圆及其外切正方形中，$AQCB$ 为“尖锥”，他求得尖锥的面积为 $1/(2\cdot 3)+1/(2\cdot 4\cdot 5)+3/(2\cdot 4\cdot 6\cdot 7)+\cdots$，由此便得 $AOCQ$ 的面积=正方形面积−尖锥面积，就是

$$\pi/4=1-[1/(2\cdot 3)+1/(2\cdot 4\cdot 5)+3/(2\cdot 4\cdot 6\cdot 7)+\cdots]$$

可见，虽然李善兰的尖锥术理论并不十分严谨，但在这里却得到了正确的结果。

咸丰季年，英国伟烈亚力（1815～1887）等到上海，与李

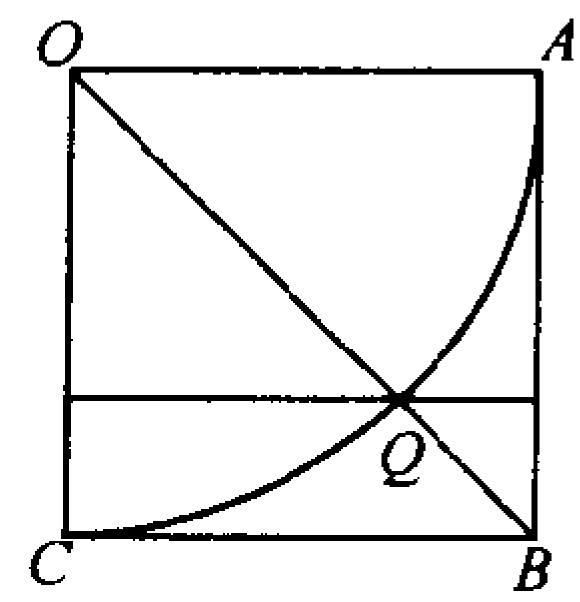


图 6-3

善兰共同于1856年译完《几何原本》后9卷，1859年译完英国德·摩尔根的《代数学》13卷和罗密士的《代微拾级》18卷，还翻译了《数学启蒙》、《重学浅说》等，把微积分传到中国，在中国数学史上造成了很大的影响。由此，一些π的无穷级数式相继产生。如夏鸾翔在《万象一原》中仿李善兰的后一个式子得到5个无穷级数式，其中1个同莱布尼茨式，另外4个见表6-1。

4. 无穷级数在日本

日本数学史上有一项可以自豪的成就。1722年即日本享保7年，建部贤宏用和算中的求弧背性质的一种方法，得到5个π^2的无穷级数，都排在表6-1中。这比欧拉类似的结果早15年，其中（21）式与后来中国徐有壬的式子相同。

1766年，日本数学家有马赖僮（1714～1783）及其后的和田宁（1787～1840），设牛顿反正弦展开式中的$x=1/2$，得到两个与牛顿式本质一样的式子

$$\pi/3=1+1/(2\cdot3\cdot2^2)+3^2/(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot2^4)+3^2\cdot5^2/(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot2^6)+\cdots$$

$$\pi/3=1+1/(2\cdot3\cdot4)+3\cdot3/(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot4^2)+3\cdot3\cdot5\cdot5/(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot4^3)+\cdots$$

和田宁还设上述牛顿式中的$x=1$，得$\pi/2=1+1/(3\cdot2)+3/(5\cdot8)+15/(7\cdot48)+\cdots$，这个式子同表6-1中夏鸾翔的（3）式。

日本数学家安岛直圆（1738或1739～1798），研究和算中的“圆理”及“垛术”（一般级数），从而整理出和6.3的3.

中李善兰式子相同的无穷级数。

日本数学家会田安明（1747～1817），也曾发现容易由普法夫公式导出的无穷级数

$\pi/2=1+1/3+2/3\cdot5+2\cdot3/3\cdot5\cdot7+2\cdot3\cdot4/3\cdot5\cdot7\cdot9+\cdots$

此外，松永良弼发现了 $\pi/3=1+1/(4\cdot6)+3^2/(4\cdot6\cdot8\cdot10)+3^2\cdot5^2/(4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14)+\cdots$。此式稍加变形，便和表 6-1 中牛顿的（14）式完全一样。

日本数学家用和算求圆的参数是一个传统。比安岛直圆更早的数学家镰田俊清（Kamata Toshikiyo, ? ～1749）也是这么做的，他得到的一个式子也在表 6-1 中。

5. 神奇的拉马努金

1976 年，美国宾夕法尼亚的数学家 G. 安德鲁，在剑桥大学三一学院图书馆的一个装信件和票据的箱子里找到了拉马努金丢失的笔记。笔记中留下了 4000 多个公式，其中有不少 π 的无穷级数式，以下为其中 9 个：

(1) $\frac{4}{\pi}=1+\frac{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{13}{4^2}\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^3+\frac{19}{4^3}\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)+\cdots$。

(2) $\frac{16}{\pi}=5+\frac{47}{64}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{89}{64^2}\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^3+\frac{131}{64^3}\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)+\cdots$。

(3) $\frac{27}{4\pi}=2+17\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2}{27}\right)+32\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot4}{3\cdot6}\cdot\frac{2\cdot5}{3\cdot6}\left(\frac{2}{27}\right)^2+\cdots$。

(4) $\frac{15\sqrt{3}}{2\pi}=4+37\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{4}{125}\right)+70\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot4}{3\cdot6}\cdot\frac{2\cdot5}{3\cdot6}\left(\frac{4}{125}\right)^2+\cdots$。

(5) $\frac{4}{\pi}=\frac{3}{2}-\frac{23}{2^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3}{4^2}+\frac{43}{2^5}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4^2\cdot8^2}-\cdots$。

(6) $\frac{4}{\pi}=\frac{23}{18}-\frac{233}{18^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3}{4^2}+\frac{543}{18^5}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4^2\cdot8^2}-\cdots$。

(7) $\frac{4}{\pi}=\frac{1123}{882}-\frac{22\,583}{882^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3}{4^2}+\frac{44\,043}{882^5}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4^2\cdot8^2}-\cdots$。

(8) $\frac{2}{\pi\sqrt{11}}=\frac{19}{99}+\frac{299}{99^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3}{4^2}+\frac{579}{99^5}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4^2\cdot8^2}+\cdots$。

(9) $\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}=\frac{1103}{99^2}+\frac{27\,493}{99^6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3}{4^2}+\frac{53\,883}{99^{10}}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4^2\cdot8^2}+\cdots$。

看见其中一些"不规则"的数和近乎怪诞的公式，我们不能不感到这位英年早逝的印度近代数学家匪夷所思的神奇。

当然，拉马努金的神奇并不只是表现在得出这些π的无穷级数中，还表现在许多方面。下面的一个有关π和e互相联系的式子是他发现的

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1+\ddots}}}}=\left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{3/4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5/2}-1}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{2\pi/\sqrt{5}}$$

另外，一个有关π^3的公式也是拉马努金发现的

$$\int_0^\infty\frac{(\log x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{8}$$

那么，拉马努金的这些公式是如何得来的呢？他坚持认为，他只是靠模糊的直觉得出的，与那个自觉地进行研究探索的王国毫不相干。事实上，他常说女神娜摩吉利在梦中给他灵感，而且这种情况一再发生。

不过，即使是这样，我们也可以用一句名言为他找到合理的解释："灵感从来就是一个不愿拜访懒汉的客人。"

6. 无穷级数一览

π的无穷级数多如牛毛，现把它们列成表6-1，以便读者查找。但5.5的6.（2）的两个、6.3的5. 中的9个拉马努金式没有列入。表6-1中有的是反正切式的展开。

表 6-1　π 的一些无穷级数

序号	无穷级数	发现人	发现年代
(1)	$\pi=3\sqrt{3}/4+24[1/(3\cdot2^2)-1/(5\cdot2^5)-1/(2\cdot7\cdot2^8)-3/(2\cdot3\cdot9\cdot2^{11})-\cdots]$	牛顿	1665
(2)	$\pi/2=1+2[1/(1\cdot3)-1/(3\cdot5)+1/(5\cdot7)-1/(7\cdot9)+\cdots]$	欧拉	
(3)	$\pi/2=1+1/3!\ +3^2/5!\ +3^2\cdot5^2/7!\ +\cdots$	夏鸾翔	
(4)	$\pi/2=1+1/3+2/(3\cdot5)+2\cdot3/(3\cdot5\cdot7)+2\cdot3\cdot4/(3\cdot5\cdot7\cdot9)+\cdots$	会田安明	
(5)	$\pi/2\sqrt{2}=1+1/(2\cdot3!)+3^2/(2^2\cdot5!)+3^2\cdot5^2/(2^3\cdot7!)+\cdots$	镰田俊青、夏鸾翔	
(6)	$\pi/2\sqrt{3}=\sqrt{1-1/2^2+1/3^2-1/4^2+\cdots}$	欧拉	
(7)	$\pi/2\sqrt{3}=1-1/(3\cdot3)+1/(5\cdot3^2)-1/(7\cdot3^3)+\cdots$	夏鸾翔	
(8)	$\pi/2\sqrt{3}=1-1/(3\cdot3)+1/(5\cdot3^2)-1/(7\cdot3^3)+\cdots$	夏普	1699
(9)	$\pi/4=1-1/3+1/5-1/7+\cdots$	莱布尼茨	1673
(10)	$\pi/4=1-1/3!\ -3/5!\ -3^2\cdot5/7!\ -3^2\cdot5^2\cdot7/9!\ -\cdots$	安岛直圆 、李善兰	?, 1845
(11)	$\pi/4=1/3+1/(5\cdot2!)+3^2/(7\cdot4!)+3^2\cdot5^2/(9\cdot6!)+\cdots$	夏鸾翔	
(12)	$\pi/4=[1/2-1/(3\cdot2^3)+1/(5\cdot2^5)-\cdots)+[(1/3-1/(3\cdot3^3)+1/(5\cdot3^5)-\cdots]$	欧拉	1737
(13)	$\pi/3\sqrt{3}=1/2+2/(3\cdot2^3)+2\cdot4/(3\cdot5\cdot2^5)+2\cdot4\cdot6/(3\cdot5\cdot7\cdot2^7)+\cdots$	普法夫	
(14)	$\pi/6=1/2+1/(2\cdot3\cdot2^3)+3/(2\cdot4\cdot5\cdot2^5)+3\cdot5/(2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot2^7)+\cdots$	牛顿	1676
(15)	$\pi^2/6=1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots$	欧拉	1734
(16)	$\pi^2/8=1/1^2+1/3^2+1/5^2+\cdots$		
(17)	$\pi^2/8=1+2^2/(2\cdot3\cdot4)+2^2\cdot4^2/(2^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)+\cdots$	建部贤弘	1722
(18)	$\pi^2/8=1+1/6+1/(6\cdot15)+4\cdot9/(6\cdot15\cdot28)+\cdots$	建部贤弘	1722
(19)	$\pi^2/8=1+2/(3\cdot2\cdot2)+2\cdot4/(3\cdot5\cdot2^2\cdot3)+2\cdot4\cdot6/(3\cdot5\cdot7\cdot2^3\cdot4)+\cdots$	建部贤弘	1722
(20)	$\pi^2/9=1+2/[3\cdot4\cdot2]+2\cdot4/[3\cdot5\cdot(4^2\cdot3)]+2\cdot4\cdot6/[3\cdot5\cdot7\cdot(4^3\cdot4)]+\cdots$	建部贤弘	1722

续表

序号	无穷级数	发现人	发现年代
(21)	$\pi^2/9=1+1/(3\cdot4)+2^2/(3\cdot4\cdot5\cdot6)+2^2\cdot3^2/(3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8)+\cdots$	建部贤弘、徐有壬	1722, ?
(22)	$\pi^2/12=1/1^2-1/2^2+1/3^2-\cdots$		
(23)	$\pi^2/18=1/2+2/(4\cdot3\cdot2^2)+3\cdot2/(6\cdot5\cdot4\cdot3^2)+\cdots$	拉马努金	
(24)	$\pi^3/32=1/1^3-1/3^3+1/5^3-\cdots$		
(25)	$\pi^4/90=1/1^4+1/2^4+1/3^4+\cdots$		
(26)	$\pi^4/96=1/1^4+1/3^4+1/5^4+\cdots$		
(27)	$7\pi^4/720=1/1^4-1/2^4+1/3^4-\cdots$	欧拉	
(28)	$\pi^6/945=1/1^6+1/2^6+1/3^6+\cdots$	欧拉	
(29)	$\pi^6/960=1/1^6+1/3^6+1/5^6+\cdots$		
(30)	$5\pi^5/1536=1/1^5-1/3^5+1/5^5-\cdots$		
(31)	$\pi^8/9450=1/1^8+1/2^8+1/3^8+\cdots$	欧拉	
(32)	$\pi^{10}/93\ 555=1/1^{10}+1/2^{10}+1/3^{10}+\cdots$	欧拉	
(33)	$61\pi^7/184\ 320=1/1^7-1/3^7+1/5^7-\cdots$	欧拉	
(34)	$691\pi^{12}/638\ 512\ 875=1/1^{12}+1/2^{12}+1/3^{12}+\cdots$	欧拉	
(35)	$2/\pi=1-1/2^2-3/(2^2\cdot4^2)-3^2\cdot5/(2^2\cdot4^2\cdot6^2)-\cdots$	项明达	1843
(36)	$4/\pi=1+1/2^2+1/(2^2\cdot4^2)+3^2/(2^2\cdot4^2\cdot6^2)+3^2\cdot5^2/(2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2)+\cdots$		

6.4 算π妙招:反正切式

反正切展开式起源于詹姆斯·格雷戈里,而用它的原理算π则始于莱布尼茨。莱布尼茨设格雷戈里式中 $x=\pi/4$,从而第一次将反正切式展开成为无穷级数,他虽没有用它大规模算π,但却开创造了用此法大规模算π的新时代。

1. 反正切式一览

表 6-2 为本书收集到的有名的反正切式，而其他反正切式则在 6.4 的 3 中叙述。

表 6-2　π 的著名反正切式

序号	反正切式	发现人	发现年代
(1)	$\pi = 4\arctan 1$	莱布尼茨	1673
(2)	$\pi = 4\arctan 1/2 + 4\arctan 1/3$	欧拉	1737
(3)	$\pi = 4\arctan 1/4 + 4\arctan 3/5$	欧拉	
(4)	$\pi = \arctan 1/2 - 4\arctan 1/7$	欧拉	
(5)	$\pi = 8\arctan 1/3 + 4\arctan 1/7$	克劳森、欧拉	1747, 1755
(6)	$\pi = 20\arctan 1/7 + 8\arctan 3/79$	欧拉、哈顿、乔治·威加	1755, 1776, 1789
(7)	$\pi = 12\arctan 1/4 + 4\arctan 5/99$	欧拉、哈顿	
(8)	$\pi = 16\arctan 1/5 - 4\arctan 1/239$	马青	1706
(9)	$\pi = 4\arctan 1/2 + 4\arctan 1/5 + 4\arctan 1/8$	许尔兹	1844
(10)	$\pi = 8\arctan 1/5 + 4\arctan 1/7 + 8\arctan 1/8$		
(11)	$\pi = 4\arctan 1/2 + 4\arctan 1/4 + 4\arctan 1/13$		
(12)	$\pi = 8\arctan 1/4 + 4\arctan 1/7 + 4\arctan 1/13$		
(13)	$\pi = 8\arctan 1/2 - 4\arctan 1/5 + 4\arctan 1/18$		
(14)	$\pi = 8\arctan 1/3 + 4\arctan 1/5 - 4\arctan 1/18$		
(15)	$\pi = 8\arctan 1/2 - 4\arctan 1/9 - 4\arctan 1/32$		
(16)	$\pi = 8\arctan 1/3 + 4\arctan 1/9 + 4\arctan 1/32$		
(17)	$\pi = 8\arctan 1/2 - 4\arctan 1/6 + 4\arctan 1/43$		
(18)	$\pi = 8\arctan 1/3 + 4\arctan 1/6 - 4\arctan 1/43$		
(19)	$\pi = 8\arctan 1/2 - 4\arctan 1/8 - 4\arctan 1/57$		
(20)	$\pi = 8\arctan 1/3 + 4\arctan 1/8 - 4\arctan 1/57$		

续表

序号	反正切式	发现人	发现年代
(21)	$\pi=16\arctan1/5-4\arctan1/70+4\arctan1/99$	勒让德	
(22)	$\pi=16\arctan1/3-16\arctan1/8-4\arctan1/239$		
(23)	$\pi=16\arctan1/7+16\arctan1/18-4\arctan1/239$		
(24)	$\pi=16\arctan1/4-16\arctan1/21-4\arctan1/239$		
(25)	$\pi=16\arctan1/6+16\arctan1/31-4\arctan1/239$		
(26)	$\pi=24\arctan1/7-16\arctan1/57+4\arctan1/239$		
(27)	$\pi=24\arctan1/8+8\arctan1/57+4\arctan1/239$	斯托默	
(28)	$\pi=48\arctan1/18+32\arctan1/57-20\arctan1/239$	高斯	1853
(29)	$\pi=32\arctan1/10-4\arctan1/239-16\arctan1/515$	布塞卡(克林根斯蒂纳?)	1730
(30)	$\pi=16\arctan1/5-8\arctan1/408+4\arctan1/1393$	乔治·威加	1789
(31)	$\pi=12\arctan1/4+4\arctan1/20+4\arctan1/1985$	高斯	
(32)	$\pi=16\arctan1/5-4\arctan1/237+4\arctan1/28\ 322$	李文军	1991
(33)	$\pi=16\arctan1/5-4\arctan1/241-4\arctan1/28\ 800$	李文军	1991
(34)	$\pi=16\arctan1/5-4\arctan1/238+4\arctan1/56\ 883$	李文军	1991
(35)	$\pi=16\arctan1/5-4\arctan1/240-4\arctan1/57\ 361$	李文军	1991
(36)	$\pi=48\arctan1/38+80\arctan1/57+28\arctan1/239+96\arctan1/268$	高斯	
(37)	$\pi=88\arctan1/28+8\arctan1/443-20\arctan1/1393-40\arctan1/11\ 018$	艾斯柯特	1896
(38)	$\pi/4=\arctan1/4+\arctan1/5+\arctan1/7+\arctan1/8+\arctan1/13$	李文军	1997
(39)	$\pi/4=\arctan1/4+\arctan1/5+\arctan1/12+\arctan1/13+\arctan5/27$	左潜、曾纪鸿、黄宗宪	1874

2. 反正切式选证

下面，简要证明分母最大的反正切式——表6-2中的(35)式。

由 $\tan 4x = (4\tan x - 4\tan^3 x)/(1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x)$，可算得

$$\tan(4\arctan 1/5) = 120/119 \quad (6.6)$$

又由正切的和角公式 $\tan(a+b) = (\tan a + \tan b)/(1 - \tan a \tan b)$，算得

$$\tan(\arctan 1/240 + \arctan 1/57\ 361) = 1/239 \quad (6.7)$$

再由正切的和角公式及（6.7）式，就得到

$$\tan[\pi/4 + (\arctan 1/240 + \arctan 1/57\ 361)] = 120/119 \quad (6.8)$$

由 $\pi/4 < 4\arctan 1/5 < \pi/2$，$0 < \arctan 1/240 + \arctan 1/57\ 361 < \pi/4$ 和（6.6）、（6.8）式就可以知道 $4\arctan 1/5 = \pi/4 + \arctan 1/240 + \arctan 1/57\ 361$，此式即可变形为表 6-2 中的（35）式。

π 的这一类反正切式，都可以用这种方法证明。

3. 求反正切式的十大妙招

在理论上，反正切式可以有无穷多种。以下介绍 10 种导出它的方法。

（1）利用欧拉逆函数①$\arctan a + \arctan b = \arctan[(a+b)/(1-ab)]$。

设 $a = 1/(p+q)$，$b = q/(p^2+pq+1)$，则①就变为② $\arctan 1/p = \arctan 1/(p+q) + \arctan 1/(p^2+pq+1)$。设 $p = q = 1$，则得 $\pi/4 = \arctan 1/2 + \arctan 1/3$，此式即表 6-1 中的（2）式。如果设 $p=2$，$q=1$，就得到 $\arctan 1/2 = \arctan 1/3 + \arctan 1/7$；那么，表 6-1 中的（2）式就变为 $\pi/4 = 2\arctan 1/3 + \arctan 1/7$，此式就是表 6-1 中的（5）式。总之，由②递推

下去，可得多个 π 的反正切式。当然，也可以直接用①得出一系列式子。例如设 $a=1$，$b=1/5$，就得到 $\pi/4=\arctan 3/2-\arctan 1/5$。

（2）利用另一个欧拉逆函数③

$$\arctan a-\arctan b=\arctan[(a-b)/(1+ab)]$$

设 $a=1$，$b=1/100$，就得到 $\pi/4=\arctan 1/100+\arctan 99/101$，等等。

（3）利用 $\arctan 1/b=\arctan 1/(a+b)+\arctan 1/[b+(b^2+1)/a]$。

设 $b=1$，$a=98$，就得到 $\pi/4=\arctan 1/99+\arctan 49/50$。

（4）利用方程 $m\arctan 1/x+n\arctan 1/y=k\pi/4$ 的解。如果为了简便，式中 m，n，k，x，y 均可限定为整数。1895年，斯托默（1874～1957）证明它只有四个平凡解，在不知晓这些解的情况下，李文军（1944～）给出以下四组解：

当 $m=n=k=1$ 时，解得 $x=2$，$y=3$，方程为 $\pi/4=\arctan 1/2+\arctan 1/3$——表6-1中（2）式。

当 $m=2$，$n=k=1$ 时，解得 $x=3$，$y=7$，方程为 $\pi/4=2\arctan 1/3+\arctan 1/7$——表6-1中（5）式。

当 $m=2$，$n=-1$，$k=1$ 时，解得 $x=2$，$y=7$，方程为 $\pi/4=2\arctan 1/2-\arctan 1/7$——表6-2中的（4）式。

当 $m=4$，$n=-1$，$k=1$ 时，解得 $x=5$，$y=239$，方程为 $\pi/4=4\arctan 1/5-\arctan 1/239$——表6-2中（8）式。

（5）利用方程 $k_1\arctan 1/x_1+k_2\arctan 1/x_2+\cdots+k_n\arctan 1/x_n=k\pi/4$。

设 $k=k_2=1$，$k_1=k_3=2$，解得 $x_1=5$，$x_2=7$，$x_3=8$，此时原方程变为表6-2中（10）式

$$\pi/4=2\arctan 1/5+\arctan 1/7+2\arctan 1/8$$

(6) 利用李文军发现的 $\pi/4=\arctan[(4\cdot 10^n-1)/(4\cdot 10^n+1)]+\arctan[1/(4\cdot 10^n)]$。

如果设 $n=0$，就得到 $\pi/4=\arctan 1/4+\arctan 3/5$——表6-2中的（3）式。再如设 $n=1$，就又可得 $\pi/4=\arctan 39/41+\arctan 1/40$。

(7) 利用 $\pi/4=\arctan[n/(n+1)]+\arctan[1/(2n+1)]$，$\pi/4=\arctan[n/(n+3)]+\arctan[3/(2n+3)]$，…。这一组公式的通式是 $\pi/4=\arctan[n/(n+2k+1)]+\arctan[(2k+1)/(2n+2k+1)]$。如果设 $n=1$，就得到 $\pi/4=\arctan 1/2+\arctan 1/3$——表 6-2 中的（2）式。

(8) 利用 $\pi/4=\arctan[n/(n+2)]+\arctan[1/(n+1)]$，$\pi/4=\arctan[n/(n+4)]+\arctan[2/(n+2)]$，…。这一组公式的通式是 $\pi/4=\arctan[n/(n+2k)]+\arctan[k/(n+k)]$。如果设 $n=3$，就得到 $\pi/4=\arctan 1/4+\arctan 3/5$——表 6-2 中的（3）式。

(9) 利用 $\arctan[1/(2n+1)]=\arctan[1/(2n+3)]+\arctan\{1/[2\cdot(2n+3)^2]\}$。如果设 $n=0$，就得到 $\pi/4=\arctan 1/2+\arctan 1/3$——表 6-2 中（2）式。再如设 $n=3$，就得到 $\arctan 1/7=\arctan 1/9+\arctan 1/32$。将表 6-2 中（4）式里的 $\arctan 1/7$ 换为 $\arctan 1/9+\arctan 1/32$，就得到表 6-2 中的（15）式。

(10) 利用特殊角正切 $\tan\pi/12=2-\sqrt{3}$，$\tan\pi/8=\sqrt{2}-1$，$\tan\pi/6=\sqrt{3}/3$，$\tan\pi/3=\sqrt{3}$，$\tan 3\pi/8=\sqrt{2}+1$，$\tan 5\pi/12=\sqrt{3}+2$，可以分别得到 $\pi/12=\arctan(2-\sqrt{3})$，$\pi/8=\arctan(\sqrt{2}-1)$，$\pi/6=\arctan(\sqrt{3}/3)$，$\pi/3=\arctan\sqrt{3}$，$3\pi/8=$

arctan $(\sqrt{2}+1)$，$5\pi/12=\arctan(\sqrt{3}+2)$。

6.5 精彩纷呈的其他表达式

π 的多种其他表达式如下：

（1）正切表达式。1813 年，德国数学教授秀瓦普（1743～1821）利用正多边形和反证法推出 $4/\pi=\tan(\pi/4)+\tan(\pi/8)/2+\tan(\pi/16)/4+\cdots$。显然，这是 π 的一个正切表达式。有趣的是，这个式子与欧拉的 $1/x-\cos x=\tan(x/2)/2+\tan(x/4)/4+\tan(x/8)/8+\cdots$ 中设 $x=\pi/2$ 时的结果相同。不过，这个常数项无穷级数是不好用来算 π 的。

（2）反正、余弦表达式。对应于 π 的反正切式，可写出像 $\pi/12=\arcsin[(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4]$，$\pi/6=\arcsin 1/2$，$\pi/4=\arcsin\sqrt{2}/2$，$\pi/3=\arcsin\sqrt{3}/2$，…；和 $\pi/12=\arccos[(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4]$，$\pi/6=\arccos\sqrt{3}/2$，$\pi/4=\arccos\sqrt{2}/2$，$\pi/3=\arccos 1/2$，…。其中有的我们已用牛顿 1676 年的反正弦式等展开成无穷级数列入表 6-1 中，而其余的如果用于实际算 π 则明显不便，所以很少有人提及。

（3）正、余弦表达式。有 $\pi/4=\sum_{n=0}^{\infty}[\sin(2n+1)x]/(2n+1)$，$\pi/4=\sum_{n=0}^{\infty}[\cos(2n+1)x]/(2n+1)$，两式中 $0<x<\pi/2$。只要考虑函数 $f(x)=1$ 的傅里叶级数展开式就可以得到这两个式子。这两个式子深刻揭示了 π 与三角函数即圆函数之间的关系，正弦和余弦函数之间的关系。

（4）阶乘型和排列组合型无穷表达式，例如 5.5 的 6.（2）里的两个式子。

（5）可供计算单个数字的无穷表达式，例如 5.8 中的 4 个式子。

（6）“普通分数”即“简单分数”无限表达式。普通分数是与“连分数”对应的名称，这里指将 π 值用无穷多个分子为 1、分母为整数的分数的代数和表达出来。请先看下式：

	3.141 592 653 589 793…	——（3.14…/1）
−3/1——	−3	
	0.141 592 653 589 793…	——+1/7.06…
−1/7——	−0.142 857 142 857 142…	
	−0.001 264 489 267 349…	——−1/709.83…
+1/791——	0.001 264 222 503 160…	
	0.000 000 266 764 189…	——−1/3 748 629.09…
+1/374 862 9——	0.000 000 266 764 195…	
	0.000 000 000 000 006…	
	…	

π 值减去整数 3——第一级近似后，余下的 0.141 592 653 589 793…就可以化为 1/7.06…，化法是将它取倒数；现在取与 7.06 最接近的整数 7，就得到 π=3+1/7——第二级近似。然后在余值 0.141 592 653 589 793…中减去 1/7 即 0.142 857 142 857 142…，又余下 −0.001 264 489 267 349…，再如前将其化为 −1/790.83…，又取它的分母 790.83…最接近的整数 791，就得到 π=3+1/7−1/791——第三级近似。如此继续算下去，就又得到 π=3+1/7−1/791−1/3 748 629 +…，如取前 4 项，就可以得到 π=3.141 592 654，已精确到小数点后第 9 位。由此可见，我们可以用普通分数无限表达式来近似表达 π 值。

值得注意的是，(1) 类“普通分数无限表达式”及“无限连分式”，它们和 (2) 类“无穷乘积”、“无穷级数”、“反正切式”以及其他无穷表达式相比较，有两个不同点。一是，(1) 不能准确表示 π 值，而仅能近似表示到人们已算出的任意位数，如 3. 141 592 654；但 (2) 则可无误差地表示 π 值，如 $4\arctan 1/2+4\arctan 1/3$。二是，(1) 只能根据已知 π 值写出，它的用途不是算 π 值；而 (2) 则可以在未知 π 值时算 π 的值——理论上可算到任意多位。

◎第七章

"大明星"不是冒牌货——π与名题

好问题同某种蘑菇有些相像，它们都成堆地生长。找到一个以后，你应当在周围找找，很可能在附近就有几个。

——波利亚

7.1 π与化圆为方

古代和近代各有"三大数学难题"，古代三大难题之一是"化圆为方"。约公元前1650年，古埃及人艾哈麦斯抄写的莱茵特纸草书中说："取圆直径的8/9，作为正方形的边长，就可以得到和圆等面积的正方形。"可见，此时化圆为方漫漫征程的处女航船已经起锚远航。

1. 古希腊的热门话题

在公元前5世纪前后，古希腊流行着尺规作图的三个著名古典数学难题："倍立方体"——将正方体体积加倍，"三等分

角”——将任意角三等分，“化圆为方”——将圆变成等面积的正方形。这些问题，最早是由古希腊雅典的智人学派即哲人学派正式提出来的。

化圆为方问题又称“方圆问题”。在数学史上，只有为数很少的几个几何问题能像它那样引起过人们长期而热烈的兴趣。当时就有许多人研究，想在这一难题上大显身手。

最早研究这一问题的是古希腊数学家阿纳萨哥拉斯（公元前500或499～前428)。他崇尚科学精神，把自己全部的精力和生命都贡献给了科学，竟不去照管自己拥有的相当数量的财产。有人问他，人生的目的是什么？他说是研究太阳、月亮和天空。他一生大部分时间住在雅典，和著名的政治家伯里克利（约公元前495～前429）为友，并得到他的支持。后来雅典在伯罗奔尼撒战争——雅典与斯巴达间的战争中失败，伯里克利的威信下降。阿纳萨哥拉斯受到牵连，被指责为亵渎神灵。因为他主张太阳不是一尊神，而是一个像希腊那样大小的、红热的石头。而月亮则是泥土，本身不发光，亮光来自太阳。于是他被投入监狱、罚款并流放，约公元前440年还险些被处死，幸亏得到伯里克利的营救而获释。他在狱中仍潜心研究化圆为方，但终未如愿以偿。可惜的是，有关研究成果没有流传下来。

其后，在约公元前430年，智人学派的安提丰从圆内接正方形或正三角形开始，用边数逐次加倍法去逼近圆，去化圆为方。这种要经过无数次作图来解题的方法，显然是错误的。但其思想却是现代极限论的雏形，具有划时代意义，他也因此成为穷竭法的先驱。这种方法，成为后来阿基米德割圆术的先导，也为求圆面积提供了一种近似方法。

智人学派另一数学家希皮亚斯（公元前460～?），在约公

元前 425 年发明了“割圆曲线”。它不但可以三等分任意角，而且在后来的公元前 350 年，被古希腊数学家狄诺斯特拉托斯（公元前 4 世纪）应用于化圆为方。但也有人认为是后者独立发明了这种曲线。这种曲线的原始记载，见古希腊数学家帕波斯（约 300～350）记有大量数学史料的《数学汇编》中。这本书，记有关于古典三大几何作图难题的种种尝试，使化圆为方得以记载并流传下来。

公元前 414 年，雅典诗人阿里斯托汉斯（公元前 448～前 385），在他的喜剧小品《鸟》中，描述了一个几何学家声明他的目标就是要解决化圆为方。《鸟》中写道：“默冬：我拿起一支直尺，就开始化圆为方了。”默冬（公元前 5 世纪）是古希腊最著名的天文学家，以在公元前 432 年的雅典奥运会上，宣布发现著名的“默冬周期”（设置闰年的 19 年周期）而闻名。

不过，这些努力无不以败走麦城告终。从此以后，希腊人对这种活动用一个专门的词表示：“献身于化圆为方”。可见研究的普遍程度和难度。直到现在，英语里“致力于化圆为方的人”一词，还用来指那些“去做不可能的事情”的人。

2：貌似成功之后的“福”兮“祸”所依

当时，人们对化圆为方的认识好似雾里看花，而失败和困难迫使他们思考：圆是曲线图形，正方形是直线图形，是不是曲线图形永远不可能与直线图形的面积相等呢？

古希腊数学家希波克拉底（约公元前 5 世纪下半叶），给出了一部分正确答案。他也研究化圆为方，曾将化圆为方归结为由圆弧构成的月牙形变成等面积正方形的问题。图 7-1 中两个月牙形面积之和的确等于直角三角形 *ABC* 的面积——这被称为

“希波克拉底定理”，从而第一次证明了曲线图形可以和直线图形的面积相等。他还把一个月牙形和一个圆一起化为一个正方形。虽然他化圆为方最终失败，但这个成果却使人们大开眼界。

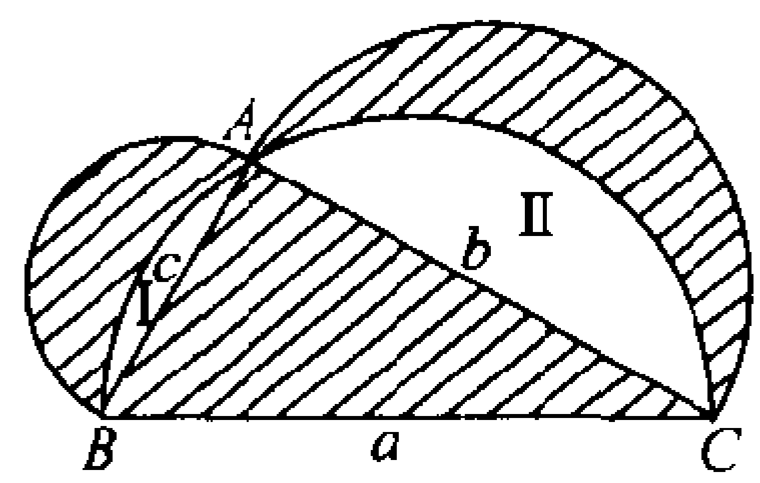


图 7-1

不过，希波克拉底证明曲线图形可以和直线图形等面积的成果，对化圆为方来说，却不是“福”而是“祸”：这一事实不断给那些化圆为方迷们激起虚假的妄想，前仆后继地去解决那个似乎唾手可得的化圆为方。

图 7-2 所示“花瓶”，全由相同半径 R 的圆弧组成：下部为 3/4 个圆周，上部为 3 个 1/4 圆周。乍看它怎么也不可能和某个正方形等面积，但稍加计算就知道，它的面积是 $4R^2$！因此，它容易化成边长为 $2R$ 的正方形。

既然比圆还“复杂”，而且全由圆弧组成的“花瓶”也可以“化曲为方”，那化圆为方是肯定可以解决的——那个时代的化圆为方迷们一定走进了这条死胡同，使人类在黑暗中探索了 2000 多个春秋！

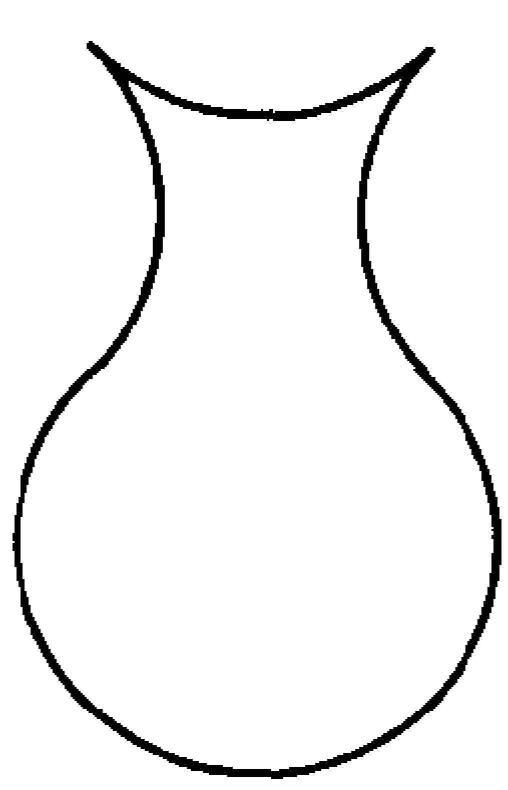


图 7-2

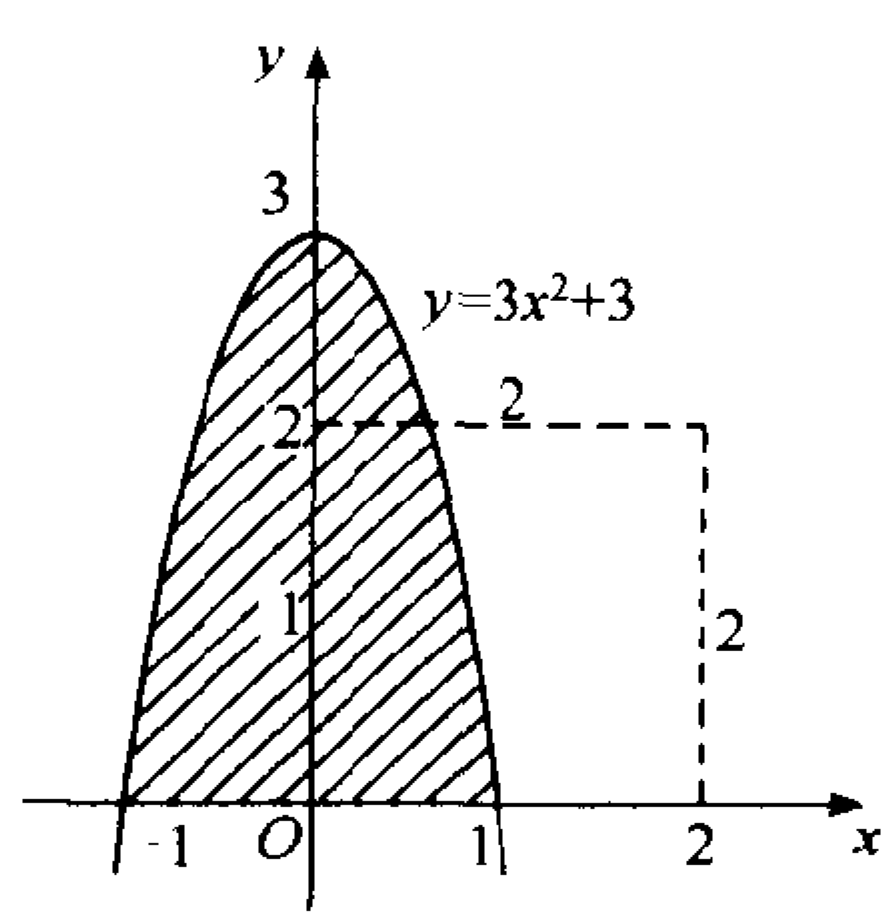


图 7-3

实际上，曲线图形可以和直线图形等面积，从而可以互化的例子比比皆是。图 7-3 所表示的抛物线 $y=3-3x^2$ 与 x 轴围成的图形，就和边长为 2 的正方形面积相等。读者不难用定积分求曲边梯形面积的方法去证明。

3. 漫漫征程 2000 年

约公元前 370 年，欧多克索斯（约公元前 408～前 355）采用了安提丰的方法，提出了穷竭法的原理。同时代的古希腊数学家布里森（约公元前 5 世纪），则考虑用圆的内接和外切正多边形边数加倍来逼近圆的方法化圆为方，但也铩羽而归。不过，他们的劳动并没有白费——其“内外夹”的方法成为其后阿基米德割圆术的雏形。

公元前 300 年左右，今天家喻户晓的欧几里得也企图化圆为方，但他也折戟沉沙。

阿基米德也研究过化圆为方，他采用的是阿基米德螺线（见 7.1 的9.(3)）—— 一个应该出示“红牌”的方法。

510 年，罗马数学家、哲学家、政治家、中世纪经院哲学的奠基人博伊西斯（约 480～524 或 526）说，亚里士多德时代以来的化圆为方问题，他已经解决，但是证明太长，不能写出。显然他的“解决”有误。由于他的不同凡响的学识和道德遭到嫉恨，他在 523 年被诬控叛国，他在数学、天文学方面的学说被视为异端邪说，终于约 524 年被捕入狱，最终被绞死。他翻译了许多古希腊学者的各学科著作，而他最后的著作——《哲学的慰藉》，则诞生在狱中。

11 世纪，德国人鲁提斯（Frankos Von Luttich）写了一本被认为是开辟化圆为方问题新纪元的 6 卷本重要著作，但仅有

一部分被保留下来。

15世纪，大名鼎鼎的达·芬奇（1452～1519）研究化圆为方。他那该"被罚出场"的方法见7.1的9.(2)。

1503年，意大利（？）特拉贡伊斯姆斯（Tetragonismus），在他《圆求方》的书中用22/7化圆为方。这本书和法国数学家波耶勒斯（Charles Bouelles）出版的一个对开本，很可能是最早印刷出来的以化圆为方为主题的书。

1525年，艺术家杜勒（1471～1528）在他出版的《直尺与圆规测量指南》一书中，取$\pi=25/8$，并用它来化圆为方。

1544年，在1532年成为法兰西学院第一位数学教授的法国数学家芬尼（1494～1555），提出了一种化圆为方的方法，但是被葡萄牙数学家努涅斯（1502～1578）和布特奥（1492～1572）证明是错误的。

1647年，比利时耶稣教会会士文克恩特·格雷戈里（1584～1667），在安特卫普出版的《几何化圆为方与圆锥曲线》一书中，提出了四种化圆为方的方法，但实际上都是打的"白条"。惠更斯和其他许多人都曾指出过他的错误。文克恩特·格雷戈里死后一年即1668年，出版了他关于这一课题的另一本书。后来，法国数学家蒙丢克拉（1725～1799）别有风趣地评论说："没有人以如此的才智投入化圆为方问题并取得如此的成功——除去他的主要目的。"文克恩特·格雷戈里还在1624年出版过一本叫《理论数学》的书，其中有对详尽无遗的化圆为方的方法的清晰叙述。

1728年，法国人马尔苏龙（Malthulon）声称找到了化圆为方的方法。他非常自信地设立了一项永久性的、数额为1000法郎的奖金，以奖励任何证明他的错误的人。一个叫尼

科里（Nicoli）的人证明了马尔苏龙的错误，于是他得到了这笔奖金。不过，他把这些奖金赠给了里昂的迪尤旅馆（Hotel Dieu），而最终评审奖金的理事会则把这笔钱给了穷人。

同一年（一说1743年），英国诗人亚历山大·蒲柏（1688～1744）在《群愚史诗》（Dunciad）中写道：

现在，只有疯子数学没被绑住，
她疯得太厉害了，
有形的枷锁也对她无可奈何；
有时坐着发呆，有时为了解决方圆问题，忙得团团转。
狂热的数学家绕着地球跑，发现它是方的。

蒲柏在诗的注释中解释说："这是化圆为方的轻率的、毫无成果的尝试。"

由此可见，这种狂热，已经蔓延到数学界以外的所有人群，而且不拘四季，不论晨昏。

1743年，卡尤萨斯用圆形草皮，用 $\pi=4$ 化圆为方，这已在5.2的2.(1) 中提到。

为了记载这种狂热，蒙丢克拉于1754年在巴黎出版了一本有史以来最完善的、系统研究圆周率包括化圆为方历史方面的书——《圆面积研究的历史》。这本书使他名声鹊起。

不过，其间也有人在冷静思考。意大利诗人但丁（1265～1321）就是其中一个。他在《神曲：天堂》第33篇中就说："几何学家尝试化圆为方，却又徒劳无功时，便会怀疑他是否仍未掌握某些原理。我刚看到这种景象时，也有类似的想法。"

有趣的是，18世纪时曾盛行一个说法：化圆为方是了解经度问题的关键。对于这种说法，德·摩尔根在他的《谬论集》（又译《矛盾集》）里说："有时，某位船长靠岸时才发现来错

了地方，这时圆弧测定者就会对他说：‘这都是天文学家的错，他们不懂得如何计算圆。’船长也觉得这种说法很好下台阶。经度问题就是这样被炒热的。”

4. 有“令”不止“涛声依旧”

总之，从公元前 5 世纪开始之后的 2000 多个寒暑里，化圆为方吸引着西方几乎每一位“水中望月”的数学家和数学爱好者。没有提到的长长名单中，有托勒密、韦达、笛卡儿、费马、斯吕塞（1622～1685）、伽利略的学生维维亚尼（1622～1703）、库萨的枢机主教德·库萨·尼古拉斯（1401～1464）、德国人约翰·穆勒（1436～1474）、西蒙·凡·爱克、约翰·波尔塔、斯涅耳、惠更斯、沃利斯、牛顿、莱布尼茨……

几乎每年都有人欣喜若狂地宣称：我解决了化圆为方！但没过多久，人们就发现在他们不管是“明修栈道”还是“暗度陈仓”的“解决”中，不是在这里——就是在那里，总会有一点小小的、但却是致命的错误，于是他的“解决”轰然倒塌。接着，就爆发出一阵阵善意的笑声……

“但是，化圆为方者决心要闯出一些名堂，因此将脑筋动到媒体身上。科学界对他们毫不领情，他们便要在报纸上讨回公道。这只古老的数学怪兽每年总要登上报纸几次，向世人宣布某某终于解决方圆问题了。”舒伯特（Hermenn Schubert）后来在 1898 年出版的《数学随笔》中，对化圆为方这个长久不衰的热门话题这么评论。

年复一年，有关化圆为方的论文雪片般地飞向各国科学评审机构，多得使科学家们无法卒读。显然，这种严重干扰科学家们正常工作的现象再不能继续下去了，必须采取断然措施。

1755（一说 1775，但可能有误）年，法国科学院（French Academy of Science）在专门会议上讨论了这些论文造成的麻烦后，通过了一项决议：不再审议有关“三大难题”和类似性质问题——例如“永动机”的论文。德·摩尔根后来评论说，这是“官方反对研究化圆为方”。德·摩尔根是伦敦数学会的创始人、“四色问题”的提出者弗朗西斯·居特里（1831～1899）和他的弟弟弗勒德里克·居特里（1833～1866）的老师。

大致同时，英国皇家学会也做出了类似的决定。

但是，这一“禁令”却止不住痴痴的化圆为方迷们“顶风作案”。正如 1898 年舒伯特在《数学随笔》中说的那样：“数学可说是最公正客观的科学，但化圆为方者才不在乎数学怎么说。只要无知继续存在，再加上沽名钓誉心态的推波助澜，这种人便会不断出现。”

1788 年，一位叫华生威勒（M. de Vausenville）的人，为一个奖项已被提供给解决化圆为方这一错误的形象而苦恼，于是他要法国科学院授予他自认为有资格获得的奖金，而且不惜和法国科学院对簿公堂。这是一个“身后有余忘缩手”的“化圆为方病”患者。

1825 年，意大利马拉卡尔勒（Malacarne），企图用 $\pi=3$ 来化圆为方。1833 年，英国巴特勒试图用 $\pi=3.202\ 216\ 066\cdots$ 来化圆为方。这两件事分别在 5.1 的 2 和 5.2 的 2 .(14) 里已经提到。他们是最后尝试化圆为方的一批名人。

20 多个世纪过去了，化圆为方仍然没有解决，这就迫使人们作“眼前无路想回头”的冷静思考：这个问题根本就无法用尺规作图法来解决。例如，法国天文学家阿拉戈（1786～1853）在 19 世纪上半叶写道：“追求解答方圆问题的人们，在

继续从事这个题目的演算，其实这个题目的不可能解答，如今已经正式证明出来。而且，即使这个解答可能实现。也不会带来实际意义。这个问题已不再传播了。害着聪明病的、专心想发现方圆问题解法的人，将不会得到什么结果。"最后，他以讽刺的口吻结束了他的文章："所有国家的科学院，在和追求解答方圆问题的人们作斗争中，发现一个事实，这个病症一般都在春天的时候加剧。"由上可见，许多人已经意识到用尺规作图法不能化圆为方。

然而，那些科学机构的决定和阿拉戈的嘲笑都无济于事。化圆为方者仍痴心不改。

就在阿拉戈死后两年即1855年，牛津大学出版社的《科学协会》上，记录了一个记者的化圆为方最简单的方法：让正方形的边长等于已知圆周长的1/4。

按照1861年詹姆斯·史密斯（James Smith）在《圆的求积》中的说法，"英国科学促进会（The British Association of the Advancement of Science）是自以为是地宣布化圆为方是不可能的，后来又拒绝审核任何相关证明。但这个问题的答案非常简单。……我现在郑重宣布，我研究出解决这个重要问题的理论了"。

下面是化圆为方的严格批评家德·摩尔根在《谬论集》中对化圆为方的大量评论和故事。他在书中首创了"圆方病患者"[morbus cyclometricus（或 syclometricus）]一词。他说："化圆为方很容易，但要说服数学家就很难了。"他认定维特斯（St. Vitus）是化圆为方问题的守护神，说："维特斯带领信徒翩翩起舞，不停地踏着没有意义的舞步。"他还说维特斯的身旁有只大公鸡，"说到自吹自擂，大概只有谷场的公鸡能和化

圆为方者一决雌雄”。他还建议将刚愎自用、自以为是的詹姆斯·史密斯抓起来，因为后者的《测圆法》一书是这种病的典型。他说圆方病患者：“就像是达尔文描述的蜘蛛。他总是在绕圈圈；每当他编出来的理论被推翻了，他又会重新再编一个。”书中的故事说，一个南美洲的耶稣会修士远赴英国，要求领取解答化圆为方的奖金。这本书在他死后一年即 1872 年，由他的妻子编辑出版。

其后的 1888 年，美国《评论和质疑》的编辑古尔德（1840～1909），为了满足公众对化圆为方等知识的要求，编辑了名为《π 的价值是什么》（What is the Value of Pi）的书，于当年在美国东北的新罕布什州南部城市曼彻斯特出版。这本书介绍了 100 篇文章，给出了 63 个作者的答案，除两项外，其余文章都注明是 19 世纪的作品。而卡文德（Lawrence Cavender）在 1967 年出版的《非凡的数学几何发现》中，还在总结化圆为方失败的“经验”：“他们的方法都不对”、“大家都以为数学大师不会错”。但最后他也无果而终。可见，直到 20 世纪下半叶，公众对化圆为方的热情仍未减退，但徒劳依旧。

当然，像这一节中提到的“非数学人士”痴迷化圆为方的例子，也持续到 20 世纪。俄国剧作家卡达耶夫（1897～?）和 1984 年当代剧作家斯托帕特（Tom Stoppard）的剧本，都以《化圆为方》为标题。卡达耶夫的《化圆为方》最早是在莫斯科艺术剧院演出，它是卡达耶夫最受欢迎的戏剧。

于是，我们只好用杜德利在《数学狂怪》中的话说：“除非文明结束，否则化圆为方迷也不会罢手。”

5. 霍布斯和沃利斯的 25 年之争

在热衷于化圆为方的“发烧友”中，自认为找到 π 的准确

值，从而解决了这一问题的大有人在。而其中"体温"最高的数英国哲学家霍布斯（1588～1679）。

霍布斯是17世纪英国革命时期大资产阶级和新贵族的思想代表，资产阶级国家学说的创立者之一。活了91岁高龄的霍布斯，直到40岁时才开始接触数学——在一次偶然的机会。1628年的一天，他参观一位绅士的图书馆，偶然看到欧几里得的著作《几何原本》。当他读到简洁美妙的毕达哥拉斯定理（即勾股定理）的时候，竟奇怪地嘟囔起来："上帝啊！这不可能！这不可能！"

可喜的是，霍布斯没有停留在惊愕之中，而是继续看这一定理的证明，而在证明这一定理时又要用到另一定理，因此他又继续阅读证明另一定理所需的定理。如此继续，直到自己心悦诚服为止。

在数学魅力的吸引下，霍布斯用此后漫长的下半生以无比的热情研究几何学。他曾写道："几何学好似含有某种像酒那样的东西。"——他对几何学的爱好已经像喝酒那样成了瘾。

霍布斯对几何学的确是发了疯，着了迷，他在自己的大腿和床单上也画满了几何图形。

霍布斯在67岁的时候，报道了一个化圆为方的巧妙方法，但立即遭到了当时已成名的沃利斯的指误。这严重地触犯了他的自尊心，并由此引出一场持续长达近25年的无聊论战，直到霍布斯生命的终结还没有停止。这场"内耗"成了当时数学界的一大憾事。后来，美国数学家马丁·加德纳（1914～　），在《科学美国人》上撰文说，这是一场"毫无意义的争论"。而明茨则说，这场争论是"无效的"。

不过，这场争论也不完全是人们说的那样毫无意义。霍布

斯迫使数学家们通过代数方法加几何方法——而不是此前单纯的几何方法去研究数学，从而引出了微积分的发明。

6. 难点原来在这里

那么，为啥化圆为方这样难呢？难在尺规作图法的限制。那什么是尺规作图法呢？

历史上最先明确提出尺规作图限制的是古希腊伊诺皮迪斯（活动于公元前465年前后）。按古希腊欧德缪斯（活动于公元前335年前后）的记载，伊诺皮迪斯发现了下面的作图方法：在已知直线的已知点上作一角与已知角相等。后来被编入欧几里得的《几何原本》第Ⅰ卷中，作为第23命题。这件事的重要性不在于实际作出这个角，而在于从尺规作图的限制下从理论上解决这个问题。在这之前，许多作图题都不限定工具。例如作垂线就可以用直角尺——类似我国的“矩”。但是，由于以下几个原因，便制定了用圆规和无刻度的直尺作图的规矩。

（1）与认为作图工具越简单越好有关。自从数学之父、古希腊泰勒斯（约公元前625～前547）在几何学中引入逻辑证明，使“几何学”“从实验室走进书斋”之后，经过约两三个世纪的演变，几何学逐渐发展成为一门独立的、演绎的科学。这一点突出地体现在欧几里得的《几何原本》这一划时代的杰作之中：它从不多的几个基本假定出发，推导出一系列的定理，这就是希腊数学的基本精神。它要求基本假定越少越好，而推出的命题则越多越好。当然，对于作图工具，自然也相应限制到不能再少的、再简单的程度。

（2）与柏拉图的哲学思想有关。柏拉图很重视数学，虽然他也是一位哲学家和科学家。他的数学概念和当时希腊的概念

一致——数学即几何。他主张通过几何的学习达到训练逻辑思维的目的，正像体育可以锻炼身体一样。体育竞技必然会有种种规矩和器械的限制，同样，训练思维的几何学当然也应该限制作图工具。而使用其他工具则过分依赖直观感觉而少依赖抽象逻辑思维。那么，训练逻辑思维为什么不直接学习逻辑规律而要借助于几何学呢？理由是，几何学能给人以强烈的直观印象，将抽象的逻辑规律体现在具体直观的图形之中。逻辑的推理和结论，还可以通过观测实验来印证，使抽象规律和感性认识结合起来，收到相得益彰的效果。2000多年的实践证明，通过几何学习来培养逻辑思维能力的确是行之有效的好方法——“几何学习是最好的脑力保健操”。

(3) 与圆规和无刻度的尺就能作出最简单、最基本的图形——圆、直线有关。毕达哥拉斯学派和其他古希腊人认为，圆和球最完美，圆和直线最简单、最基本，而用圆规和无刻度的尺，就能够作出这两种基本图形。所以，只用尺规来作图，就被沿用下来。

(4) 与当时度量不统一，彼此出入很大有关。

鉴于以上原因，在《几何原本》中，就有渐渐形成并被后人采用的如下规定。

直尺的用法是：①经过已知两点作一直线；②无限延长一直线。圆规的用法是：以任意一点为中心，过其他任意一点画一个圆。作图时，只能有限次使用圆规和直尺，不能使用无限次。两条已知不平行的直线，可以作出它们的交点，已知直线和圆或者弧、两已知圆或者弧如果相交，可以作出它们的交点。这就是圆规直尺作图方法，又叫初等几何作图方法，简称尺规作图法或规尺作图公法。

看了以上规定，我们就可讨论尺规法为什么不能化圆为方了。化圆为方，相当于用尺规作出π值。这是为什么呢？一个单位圆面积是π，若能作一个长度为π的线段，以这个线段为一边，单位线段为另一边作矩形，那显然这个矩形的面积和上述圆面积相等。再将这矩形改为正方形，就能把“圆”化为“方”了。所以，要化圆为方，关键是能够用尺规法来作出π值。但我们知道，这是不可能的。

7. 就是这么简单

那为什么不能用尺规法作出π值呢？根据法国数学家伽罗瓦（1811～1832）在1830年提出的理论，给定了单位长度“1”，用尺规作图法只能作出很“小”一部分代数数，肯定作不出超越数。如果π是超越数，则用尺规作图法化圆为方就不可能。当时，“蜀中无大将”，才“英雄出少年”——伽罗瓦时年19岁。林德曼在1882年证明了π是超越数，自此，尺规法不可能化圆为方得以证明。

在这里，我们顺便提到三大古典难题中的另两个的解决。1837年，法国数学家万泽尔（1814～1848）给出倍立方体和三等分角不能用尺规作图法的证明。不过，他的这一成就比起上述伽罗瓦理论来说，简直不值一提。因为伽罗瓦理论提出了解决这一类问题的系统理论和方法，把三大难题等问题的解决，当成这种理论的推论和习题。换句话说，万泽尔解决的是两个具体问题，而伽罗瓦提出的是解决一系列问题的理论和方法。

一些人认为化圆为方的全部困难在于π值不可能用有尽的小数表示出来，这种看法似是而非。举例来说，$\sqrt{2}$也不能用有

尽的小数表示出来，但没有比作出$\sqrt{2}$更容易的了。又比如，$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$这种看起来很“复杂”的数，作起来也并不困难。许多无理数，是可以通过规尺作图法经过有限次作图——加、减、乘、除及开平方来实现的，而超越数则不可能经过有限次作图实现。所以，化圆为方不可能用尺规法解决。

1895年，德国数学家克莱茵（1849～1925）总结了前人的成果，著《几何三大问题》，给出了古典三大难题不可能用尺规作图的简晰证明，彻底系统地解决了古典三大难题。

但是，化圆为方者并不因此“善罢甘休”。唐锡克（Tobias Dantzig）在《数：科学的语言》中就说：“圆周率被证明是超越数后，化圆为方的争论总算尘埃落定了；但化圆为方者的兴致却丝毫不减。这群人有个共同的特色：他们不但极度无知，也很擅长自欺欺人。”

8.汗水没有白流

既然用尺规作图法化圆为方最终被证明是不可能的，那是不是意味着2000多个冬夏人们对它的研究徒劳无益呢？不是的。

首先，这种探索本身就是数学的一个组成部分。从尺规作图法提出以来，追求用尽可能简单的工具画出尽可能多图形的研究，从来没有停止过，并由此得到许多研究成果。

约980年，阿拉伯数学家阿布·韦法（940～998或997）率先采用有固定张口的圆规和无刻度直尺作图。

1759年，兰伯特研究只用直尺的作图问题，发现类似于$\sqrt{ab}$的式子只用直尺不能作图。因此，他指出，需要给出一

个辅助定圆及其圆心才能完成全部尺规作图问题。

1672年，丹麦数学家莫尔（1647～1697）发表《丹麦的欧几里得》一书指出，如果把求直线解释为求直线上的两点，那么凡能用尺规法作的图形都可以只用一支圆规完成。但他的工作长期无人知晓，直到1928年才被发现。1797年，意大利数学家马斯凯罗尼（1750～1800）发表《圆规几何》一书，公布了他重新研究这一问题的成果，才使与莫尔相同的方法大显于世。他还认为，这种只用圆规的作图法比用尺和规的作图法更准确、更有价值。因此，现在将与之相关的一些论断都统称为莫尔-马斯凯罗尼定理。

1822年，法国数学家庞斯列（1788～1867）指出，给出一个圆与其圆心时，只用直尺就可以解决任何尺规作图问题。仅仅过了11年，出生在瑞士的德国数学家斯泰纳（1796～1863），在1833年就给出了这一论断的优美的证明，于是后人称之为“庞斯列-斯泰纳直尺问题（定理）”。1904年，意大利数学家塞韦里（1879～1961）进一步证明尺规作图可以只用直尺和一段给定圆弧（不管圆弧多短）及其圆心就可以完成。

1952年，德国数学家比贝尔巴赫（1886～1982），用直角尺和圆规解决了三等分任意角和倍立方体问题。

1979年，美国数学家佩多提出用固定开口的“生锈圆规”的两个作图问题。中国数学家张景中（1936～　）、杨路（1936～　）、侯晓荣等在这方面的研究，为尺规作图问题增添了“精彩的一笔”，最终解决了这两个问题，并得到了一系列成果。

其次，这种探索本身就是人类的价值所在和需要，没有这类探索，人类不可能获知大自然的奥秘；没有这类探索，最终

仍不知道西红柿不但好看而且好吃，螃蟹不好看但是好吃，蜘蛛不好看也不好吃。为实用目的而探索，值得提倡；为求知而探索，也应鼓励。后者正是科学精神的精髓，也是人类价值的体现之一。人类不但能用智慧解决生存的物质问题，而且可能并且应该解决生活的精神食粮问题——“数学也是一种文化”。

9. 此路不通时另辟蹊径

有的人在尺规作图法不能解决化圆为方之后，打破了工具和方法的限制，使化圆为方成为一个很简单的问题。

以下给出几种解法。

(1) 割圆曲线即求直曲线法。这种方法的发明人有两说。第一说认为是希皮亚斯。这种说法后来为蒙丢克拉所提倡，以后则被英国数学史家希思（1861～1940）所采用。另一说认为是狄诺斯特拉托斯。这是数学史家奥尔曼（G.J.Allman）在他1976年出版的一本书中的主张。所以，后来有人称割圆曲线为狄诺斯特拉托斯曲线。

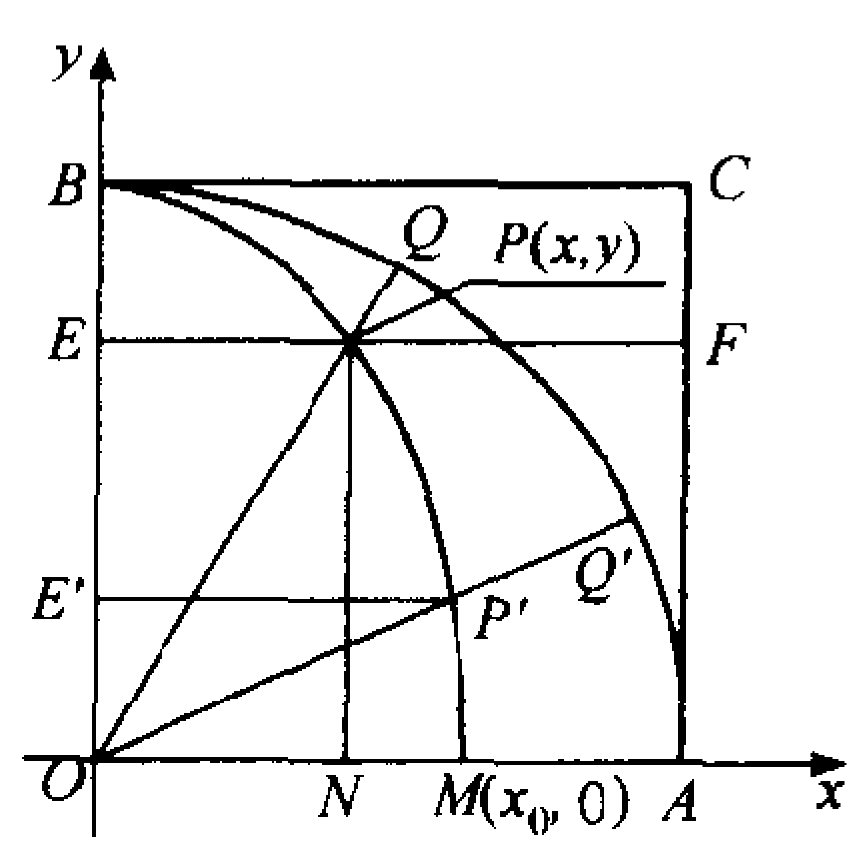


图 7-4

设图7-4中的 AQB 是单位圆的一段象限弧，$OACB$ 是单位正方形，半径 OQ 从 OB 位置匀速转动到 OA 位置，而线段 EF 则从 BC 位置匀速平移到 OA 位置。两者同时“出发”且同时在 OA 重合。在重合之前，OQ 与 EF 有一交点 $P(x, y)$，那么 P 的轨迹就叫割圆曲线，是方程为 $y = x\cot(\pi x/2)$ 的超越曲线。如果有一个器械能作出这条曲线，就可以化圆为方。下面是分析。

设$\angle AOQ=b$，由弧AQ:弧$AQB=OE:OB$即b:（$\pi/2$）$=y:1$，可得$b=\pi y/2$。于是$y/x=\tan b=\tan(\pi y/2)$，即$x=y/\tan(\pi y/2)$。设$y\to 0$，可得到曲线与OA的交点M（x_0，0），就有$x_0=\lim\limits_{y\to 0}x=\lim\limits_{y\to 0}x\cdot(2/\pi)\cdot(\pi y/2)/\tan(\pi y/2)$。这样，既然已经作出$OM=2/\pi$，再通过比例作图便可得到线段$\pi/2$，以$\pi/2$为一边，以2为另一边的矩形面积，就等于单位圆的面积。

（2）达·芬奇法。他取一个这样的圆柱：底面积和已知半径为r的圆相等，高是半径的一半。将这个圆柱的侧面在平面上无滑动地滚动一周的时候，就产生了图7-5所表示的矩形。显然这个矩形的面积是πr^2，再将它改成正方形就可以了。

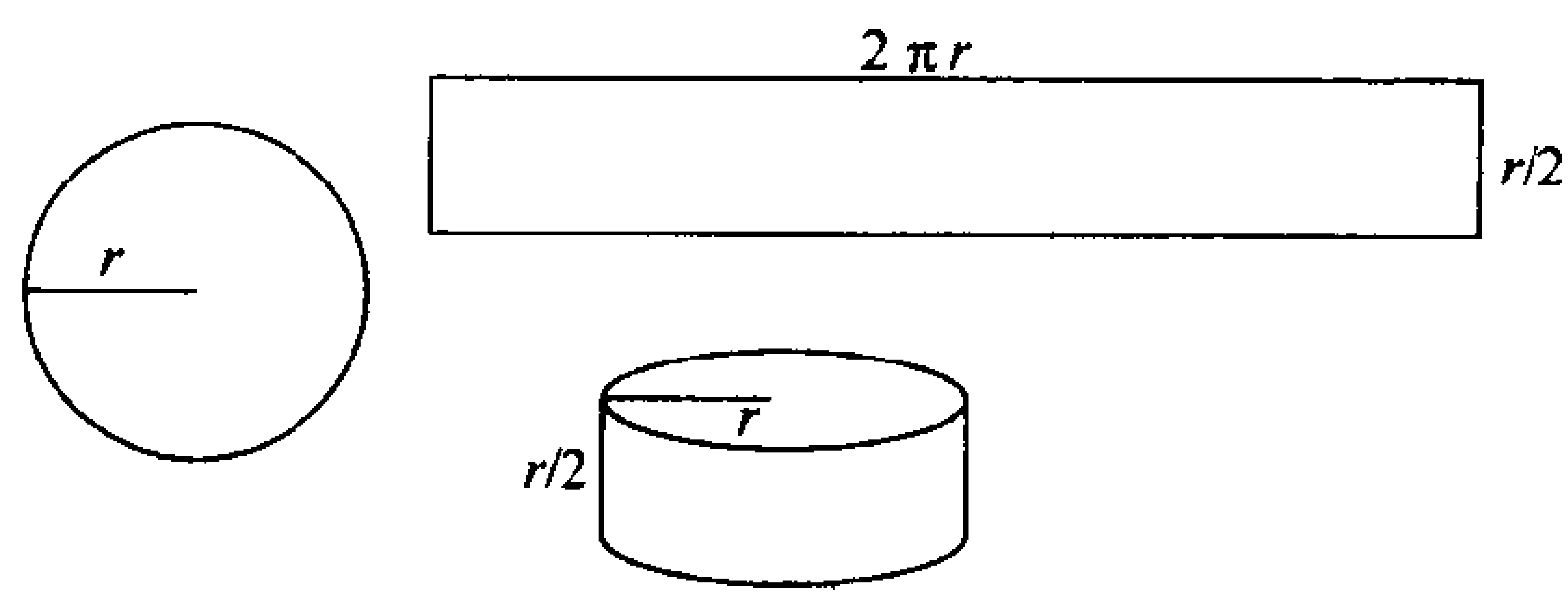


图7-5

（3）阿基米德螺线即等速螺线法。当一点P沿动射线OP以等速率运动，而射线OP又以等角速绕点O转动时，P的轨迹就是这种螺线（图7-6）。这是阿基米德在研究化圆为方时发现的。他还证得螺线第一圈与初始线所围成的图形的面积，等于以O为圆心、以OP'为半径的圆面积的1/3。

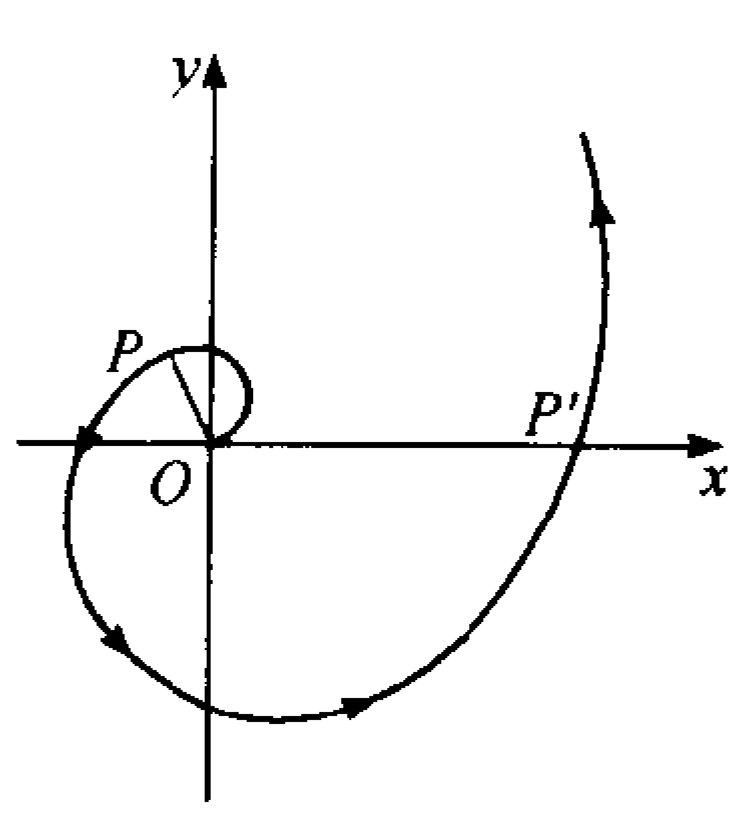


图7-6

此外，还有多种近似化圆为方的方法，如 5.2 的2.(7) 和（8）两例。而其余 10 例，则在 7.2 中叙述。

10. 探索正未有穷期

尺规法化圆为方虽然"此路不通"，但探索并没有完结。似乎与已证明"永动机"不可能造成而仍然有人研究一样，一些人依然企图用尺规法化圆为方。例如，20 世纪初集合论的出现，使化圆为方这一古老问题以"旧貌换新颜"被再次提出。波兰数学家塔尔斯基（1901 或 1902～1983）在 1925 年提出一个测度论问题：平面上的圆能否和一个具有相同面积的正方形"等可分解"?

所谓"等可分解"，是塔尔斯基和另一波兰数学家巴纳赫（1892～1945）在 1924 年提出来的。

设 A，B 是 n 维空间中的子集，如 A 可分解为两两不相交的子集 A_1，A_2，…，A_n，这里 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$，$n<\infty$；同样，$B$ 可分解为两两不相交的子集 B_1，B_2，…，B_n，这里 $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = B$，$n<\infty$。如果 A_k 与 B_k 彼此全等，即通过平移、旋转、反向能够互相重合，那么称 A 和 B 是"等可分解"的。表 7-1 为 20 世纪有关这方面的研究成果。

表 7-1

种　　类	R^1	R^2	R^3	R^4	$R^n(n\geqslant5)$
一切 n 维多边形可以和 n 方体几何等可分	是	是	否	否	否
一切 n 维多边形可以和 n 方体集合论的等可分	是	是	是	是	是
任何两个有空内点的有界子集都是集合论的可分解的	否	否	否	是	是
L 测度是 B 上有限可加，运动不变，n 方体测度为 1 的惟一测度	否	否	?	?	是
L 测度是 B 上有限可加，运动不变且 σ 不变，n 方体测度为 1 的惟一测度	否	是	是	是	是

塔尔斯基的问题也可作如下叙述：若圆和正方形面积相等，则它们的组成相等。当然这与化圆为方问题有本质区别，因为他已经拿掉了“尺规”的限制，把圆切为若干块，再把它们重新组成一个面积相等的正方形。65 年后的 1989（一说 1990）年，塔尔斯基的问题被匈牙利布达佩斯罗兰地大学的数学家米克洛什·拉茨科维奇（M.Laczkovich）所“证明”。

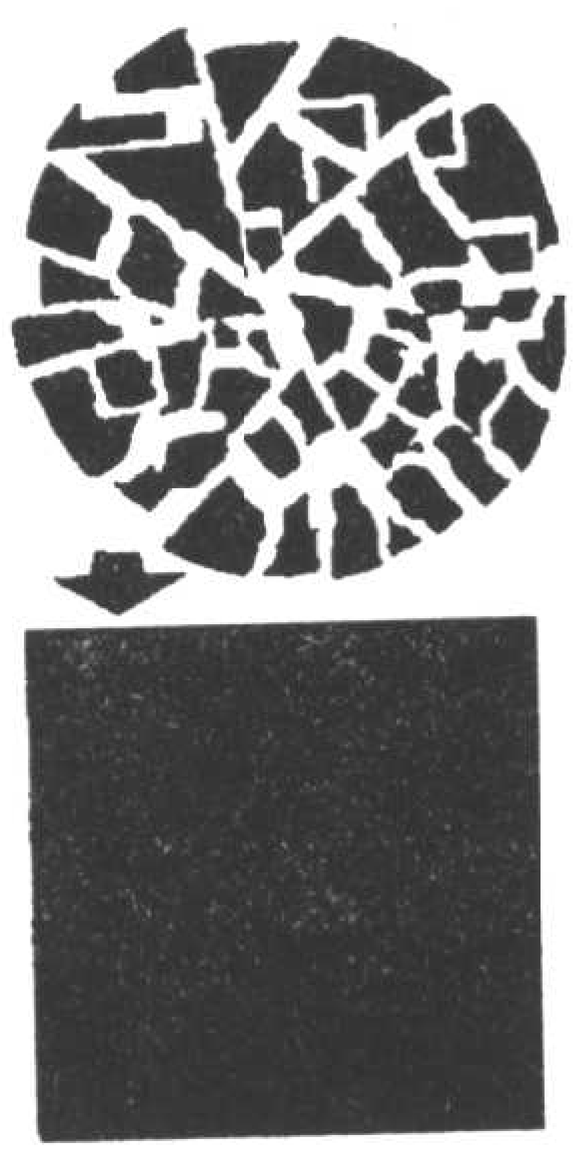


图 7-7

不过，上述问题也有另外两种说法。一说是，1989（一说 1991）年，匈牙利数学家米克洛什·拉茨科维奇用 40 页纸，证明他找到了“化圆为方”的办法。他的基本思路是：任何圆都可分割成各种有限数目的几何元素——他估计要分割成 10^{50} 块，用它们即可构成正方形（图 7-7）。所有查验他论文的几位美国数学家一致认为，他的证明无可指责。而另一说则是，“1987 年，一位年轻的匈牙利数学家的确用其他方法把圆加以割分，最后拼成正方形”。

“人类认识自然是无穷尽的”，即使研究尺规作图法化圆为方没有能成功，这也无关紧要——许多成果已经或将要产生在这只“下金蛋的鸡”中。

劳勒（Robert Lawlor）在他 1982 年出版的《神圣几何学》中，也表达了类似的观点：“化圆为方对对几何宇宙论者的意义尤其重大，因为在他们的心目中，圆象征着神秘的纯精神世界，方则是可见宇宙的象征。如果能作出面积几乎和圆相等的正方形，就能在有限的时空中，表达无限的次元或特性。”

最后，我们用波斯数学家兼诗人海亚姆（约 1049～1122

至 1131）对日历作出改造后的诗，来作为本节的结尾吧：

啊，人们说我的计算，
征服了时间，
把年份算得更准，
而日历却让我们想起，
昨天已经逝去，
明天即将来临！

7.2 作图求 π “十面埋伏”

由于化圆为方的吸引力和对 π 值的兴趣，历史上许多数学家都设计过由已知的 π 值出发，作出一条线段，使它在数值上尽可能接近准确 π 值。我们称为 “作图法近似求 π”。

下面给出 10 种方法。

1. 科汉斯基法

波兰数学家科汉斯基（1631～1700）的方法是，在图 7-8 中 ⊙O 的直径 AB 的 A 端，作与 AB 垂直的 $AC=3r$；在 O 作 OD 与 OB 成 30°的角并与 AB 过 B 的垂线 BD 交于 D，最后联结 CD，就可算得 $CD=(3.141\,533\,3\cdots)r$。如设 $r=1$，则 CD 为近似 π 值，仅与准确 π 值相差 $-0.000\,059\,3\cdots$。以下为计算过程。

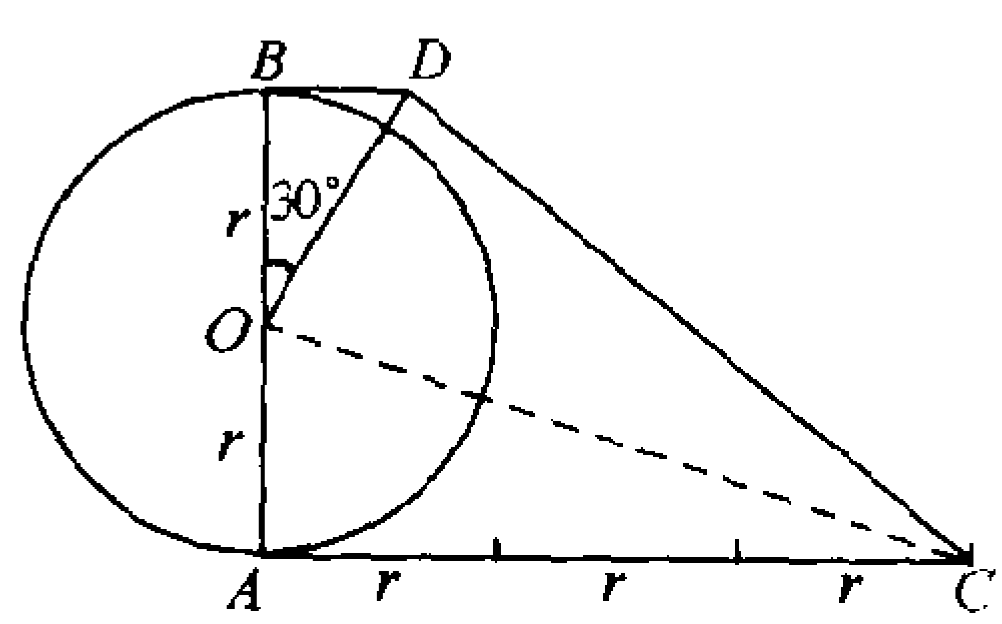


图 7-8

在直角三角形 ACO 中，由勾股定理知道，$OC=\sqrt{10}\,r$ 和 $\angle AOC=\arcsin(3/\sqrt{10})$。又在直角三角形 ODB 中，得到 $OD=$

$2r/\sqrt{3}$。而在三角形 ODC 中，可得到 $OC=\sqrt{10}r$，$OD=2r/\sqrt{3}$，$\angle DOC=180°-30°-\angle AOC=150°-\arcsin(3/\sqrt{10})$。以下由余弦定理就可算得 $CD=(3.141\ 533\ 3\cdots)\ r$。

科汉斯基的方法，记载于 1685 年在 Leipsiger Berichte 出版的《π 的一个近似几何作图》中。他于 1680～1685 年在华沙任数学教授，1686～1690 年负责宫廷乐团，1691 年被授予“宫廷数学家”的称号。

2. 斯佩特法

德国数学家斯佩特（Specht），在图 7-9 所示的单位圆⊙O 半径 OA 的 A 端垂线上，取 $AB=11/5$，取 $BC=2/5$，再联结 OB 并延长 AO 至 D，使 $AD=OB$，最后联结 OC，并作 $DE/\!/OC$。容易算出 AE 的一半，就是近似 π 值 3.141 591 953…。

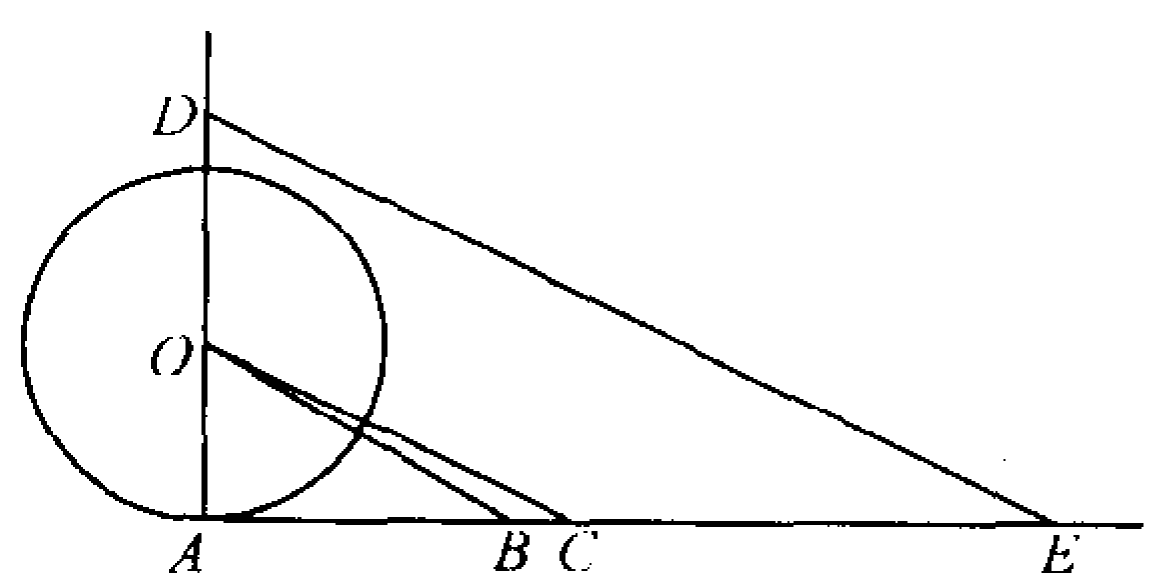


图 7-9

斯佩特的研究刊登在柏林出版的《克列尔杂志》1828 年 3 期 83 页上。这一杂志又称《纯粹与应用数学杂志》，但被戏称为《纯粹非应用数学杂志》。这一戏称的原因是，它创办不久便完全被专业化的数学论文占据。它是由德国铁路工程师、数学家克列尔（1780～1855），在朋友斯泰纳和挪威数学家阿贝尔（1802～1829）的建议下，于 1826 年创办的，是至今仍在发行的最早数学期刊。由于克列尔死后由德国数学家博查德（1814 或 1817～1880）在 1855～1880 年间接承办，所以又叫《博查德杂志》。

3. 盖尔德法

人们发现，355/113 可写为 $3+4^2/(7^2+8^2)$，很显然这容易用尺规法作出来。

1849 年，德国数学家盖尔德(Jacob de Gelder)利用这一有趣的式子，给出了很精确的近似作图法。如图 7-10，作 $BC\perp AC$，设 $AC=1$，$BC=7/8$，在 AB 上取 $AD=1/2$，再作 $DE\perp AC$，联结 BE，并作 $DF/\!/BE$ 交 AC 于 F。由三角形相似关系知道，

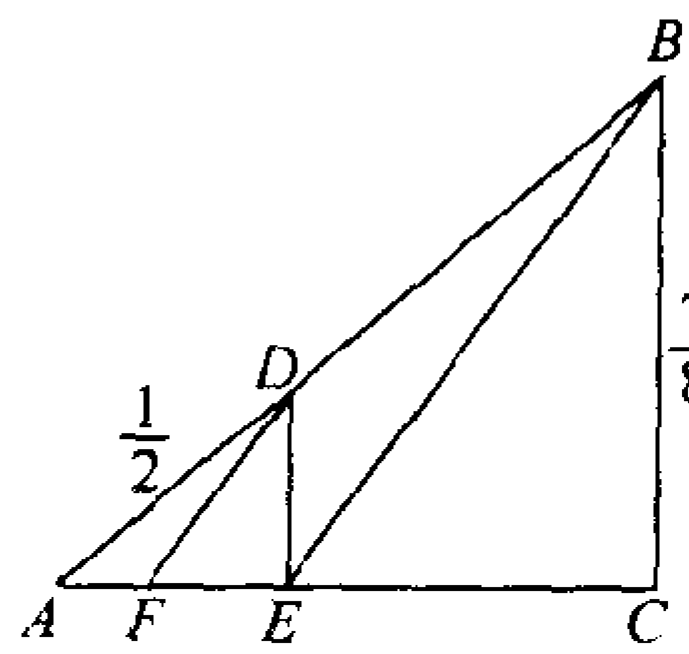


图 7-10

$AD:AB=AF:AE=DF:BE=DE:BC=AE:AC$，于是

$$AE=AD\cdot AC/AB=(1/2)/\sqrt{7^2/8^2+1}=4/\sqrt{7^2+8^2}$$

又知道，$AF=AE^2/AC=4^2/(7^2+8^2)$——前述 π 小数部分的近似值。这就可作出近似 π 值了。

4. 格诺斯维纳法

纽约数学家格诺斯维纳（Cyrus Pitt Grosvenor），在 1868 年的化圆为方的方法是，在直径为 D 的已知圆外作一外切正方形，显然正方形的对角线为$\sqrt{2}D$。在这条对角线上截取 D，以剩下部分 $(\sqrt{2}D-D)$ 为边长作一小正方形，则小正方形面积为 $(\sqrt{2}D-D)^2$，将其乘以 5/4，就得到 $5(\sqrt{2}D-D)^2/4$。再在面积为 D^2 的大正方形中减去这个值，并将减去后剩下的图形化为一个中等正方形，那么这个中等正方形为所求。翻译成数学语言就是：中等正方形面积 $=D^2-5(\sqrt{2}D-D)^2/4=D^2[1-5(\sqrt{2}D-D)^2/4]=\pi D^2/4$。

由此，就得到近似π值3.142 135…。

以上作法载于格诺斯维纳于1868年在纽约出版的《化圆为方》这本小册子中。

5. 查什法

美国宾夕法尼亚哈威尔福德的法学博士查什（Pliny E. Chase）的方法如图7-11。取$AB=3$，$AC=9$，$AD=20$，且$AC\perp BD$。再取$AX=60$，联结CD，作$BE/\!/CD$且交CA的延长线于E，最后在EC的延长线上作$EY=AD=20$。那么，容易算得$XY=\sqrt{(373/20)^2+60^2}$，而$XY:AD=3.141\ 584\ 99\cdots$，即为所求近似π值，它与准确值之差为$-0.000\ 007\ 66\cdots$。

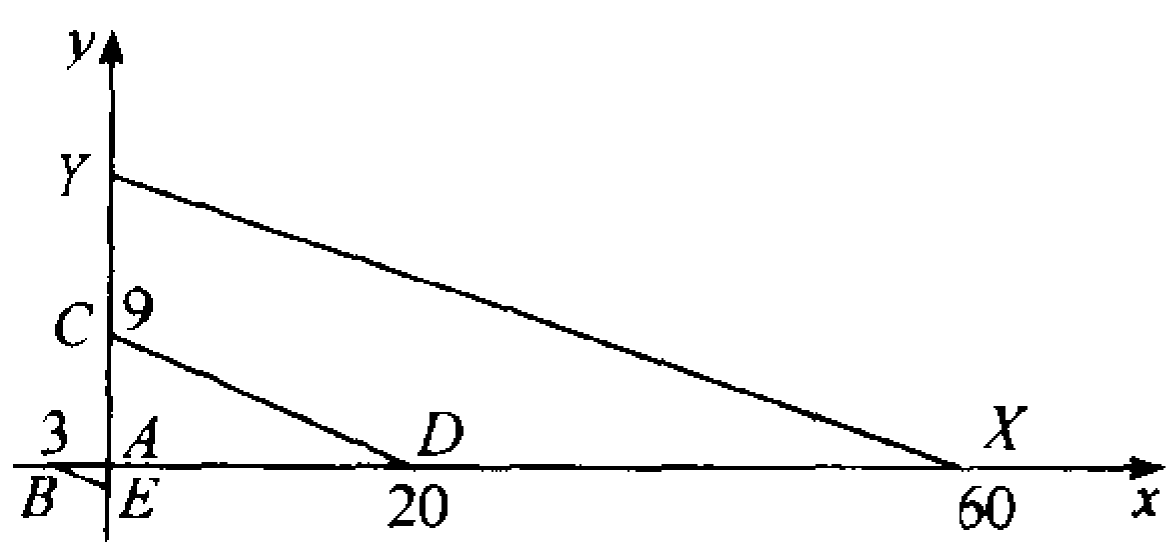


图7-11

记载查什作图法的小册子《近似化圆为方》，于1879年6月16日在哈威尔福德出版。

6. 霍布森法

1913年，英国数学家霍布森（1856～1933）在图7-12的⊙O中取半径$OA=1$，$OD=3/5$，$OE=1/2$，以DE的中点为圆心作半圆DGE；又取$OF=3/2$，再以AF的中点为圆心作半圆AHF；最后过O作垂线分别交两个半圆于G和H。那么，以GH为边的正方形的面积，就近似等于⊙O的面积。由此可以算出$\pi=3.141\ 640\ 79\cdots$。

霍布森的作图法，载于剑桥大学出版社在1913年出版的书

《化圆为方》中。此书还收入了前述盖尔德和斯佩特的方法。

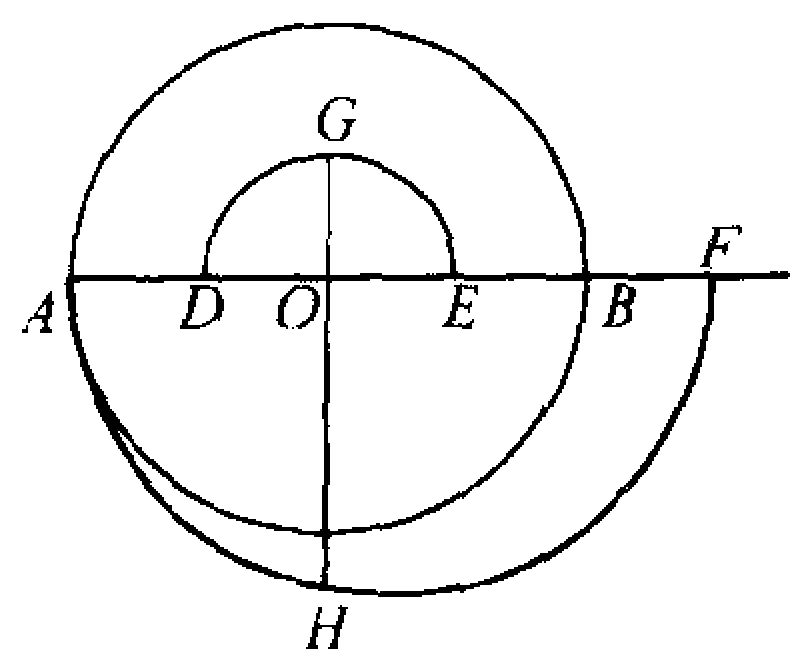


图 7-12

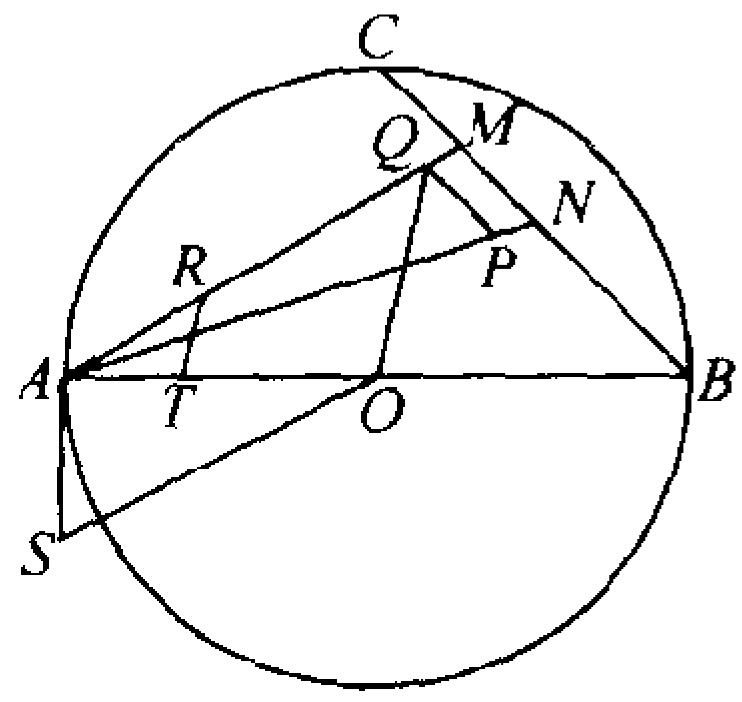


图 7-13

7. 拉马努金法

1913年，印度拉马努金发现了一个令人惊奇的π值的近似作图法。这个作图法可作出

$$\pi=\sqrt[4]{9^2+19^2/22}=3.141\ 592\ 652\ 582\ 6\cdots$$

可见它准确到小数点后第9位，即约10^{-9}。这个公式，刊于1914年第45期《数学季刊》的350～374页《近似的几何求π法》中。此外，由英国著名数学家哈代（1877～1947）等三人编辑，于1927年在剑桥大学出版社出的《拉马努金论文、资料集》中也可以找到。他发现过不少求π的几何作图法和经验公式，上述公式仅仅是其中之一。

拉马努金如图7-13先作以AB为直径的⊙O，取弧AB的中点C，联结BC。在AO上取$AT=AO/3$，在BC上取$CM=MN=AT$，分别联结AM和AN。再在AN上取$AP=AM$，并过P作$PQ/\!/MN$交AM于Q，联结OQ，作$TR/\!/OQ$交AQ于R。最后过A作圆的切线$AS=AR$，并联结OS。那么，OS和OB的比例中项即为圆周长的1/6，即$6\sqrt{OS\cdot OB}=2\pi OB$，就是$\pi=3\sqrt{OS}/\sqrt{OB}$，由作图过程求得$\sqrt{OS}$之后，就可以算得$\pi=\sqrt[4]{9^2+19^2/22}$。这个式子，也可

以写成 $\pi^4=2143/22$。

8. 胡格赫斯法

此法是英国数学家胡格赫斯（T.M.Hughes）在1914年发明的。如图7-14，在 AB 上取 $AB'=11.3$，以 AB' 为直径作圆。又在 AB 上取 $AX=71/8$，并过 X 作 $XY\perp AB'$ 且交该圆于 Y。作 AY 的延长线 AZ。容易证明：① π 的近似值是 $4(71/8)/11.3=3.141\ 592\ 920\cdots$；②任何一个直径在 AB' 或 AB' 的延长线 AB 上、过 A 的圆（例如实线所示的圆），它必定与以 AY' 为边长的正方形的面积相等，这里 Y' 为该圆与 AZ 的交点；③任何一个以 A 为一个顶点的、一边在 AB' 或 AB 上的正方形（例如虚线所示正方形），它必定与以 AY' 为直径的圆面积相等，这里 Y' 为该正方形与 AZ 的交点。注意：为了图形的简洁，我们将②和③两个结论的图共用了一部分。

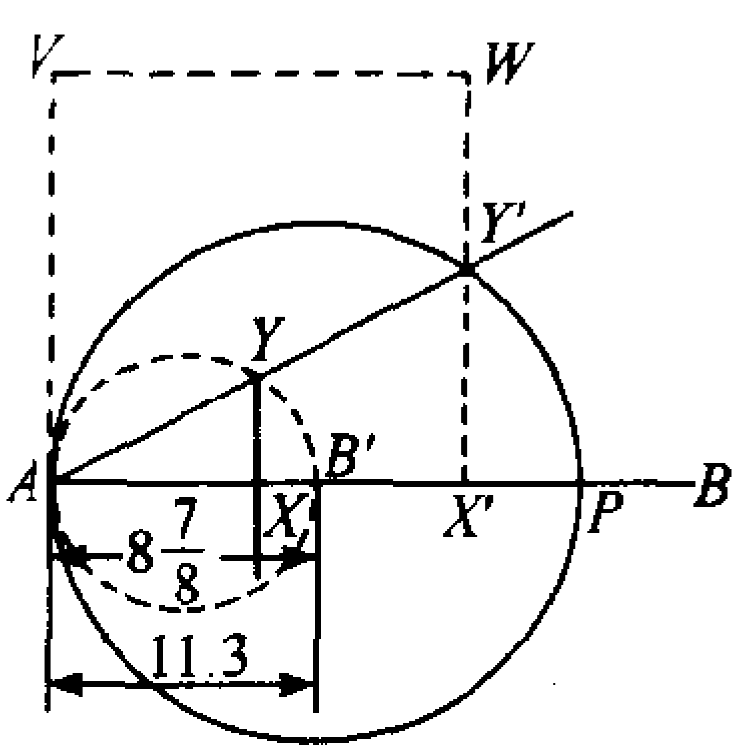


图7-14

刊有上述作图的论文《化圆为方》，载于英国《自然》杂志1914年93期110页上。

9. 梅里尔法

此法得到 $\pi=3.141\ 591\ 953\cdots$。

1934年，美国数学家梅里尔（Helen A.Merrill）在美国波士顿出版了《数学游览》（Mathematical Excursions）一书，介绍了他1933年发现的这种作图方法。

如图 7-15，设 $AB=1$ 为⊙O 的直径，在半径 OE 的 E 和半径 OA 的 A 端分别作⊙O 的切线相交于 F。在 AB 的延长线上取 $BC=0.1$，$BD=0.2$；过 D 作 $DH \perp AD$，而且交 FE 的延长线于 H，联结 AH。延长 FA 至 G，使得 $FG=FC$。过 G 作 $GP \parallel AH$ 交 FH 的延长线于 P。那么，GP 的值就是 3.141 591 953…。

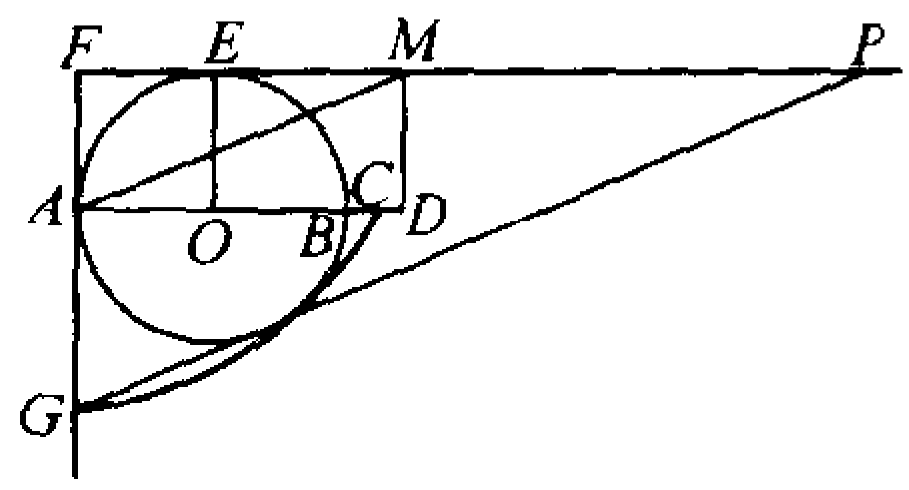


图 7-15

梅里尔法和前述斯佩特法很相似。这就有人认为梅里尔法"克隆"了斯佩特法，以至有梅里尔法"可能由另一个作者在更早的时候发现"的说法。

10. 圆方三角板法

前述 9 种方法实际得到的 π 值都准确到小数点后四五位以上。在现实生活中，往往不需要这么高的精度。因此，一种精度不太高的但更简单的"圆方三角板"法应运而生。

所谓圆方三角板，就是专门化圆为方的三角板。只要把它往圆上一放，所求的正方形的边长就出来了。这种方法非常方便实用。

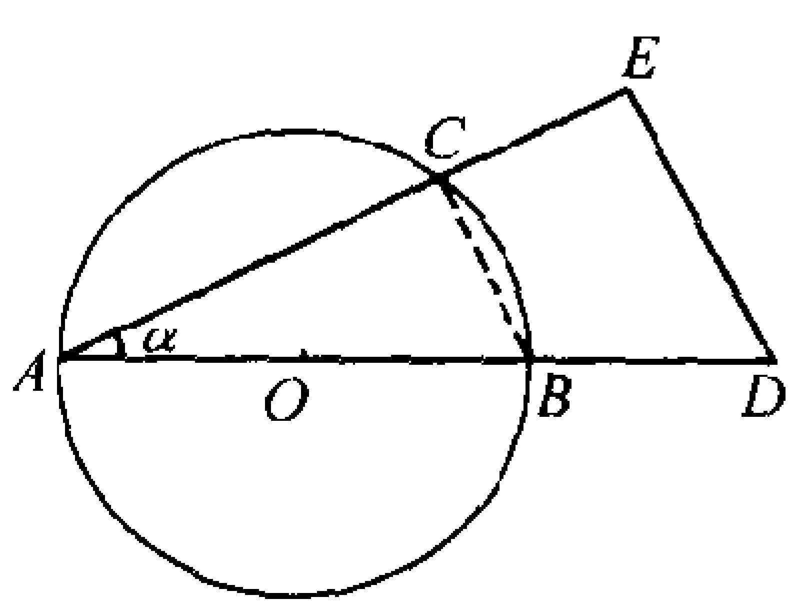


图 7-16

如图 7-16，AB 为已知圆的直径，AC 为化成的正方形的边长，容易算得 $\alpha=\arccos(\sqrt{\pi}/2)$。然而，这个角 $\arccos(\sqrt{\pi}/2)$ 是用尺规作图法作不出来的。因此，我们就取它的近似值 27°36′。然而，27°36′也不好作，于是取 $BC=23$，$AC=44$ 做个直角

三角板。这里，23∶44 = tanα = 0.5227，而 tan27°36′ = 0.5228，相差极少。当然，由于会遇到更大的圆。我们实际做的三角板是 ADE，也取 DE∶AE = 23∶44。

将三角板 ADE 的斜边往已知圆直径上一靠，使小锐角顶点在直径的一端 A 上，那么，三角板的长直角边与圆的交点 C 与 A 之间的长 AC，就是所求正方形的边长。可算得此法用到的 π = 3.141 582 1…，与 π 真值的绝对误差仅为 - 0.000 010 5…。

7.3 π与超越数、希尔伯特第 7 问题

凡是能满足某个整数系数代数方程的复数，叫代数数；凡不是代数数的数，叫超越数。π，iπ，e 等都不是任何一个整系数代数方程的根，因而它们都是超越数。欧拉在 1744 年认为，这种数超越了代数方法的效力，从而提出了超越数的概念，并给出上述定义。欧拉还凭直觉提出以代数数为底，代数数的对数的超越性的定理。从这一定理可得出所有自然数 $n \neq 10^k$（k 为整数）的常用对数都是超越数，但没有证明，1934 年，被苏联数学家盖尔丰德（1906～1968）证明。兰伯特、勒让德也区分了代数数和超越数。19 世纪初，瑞士数学家鲁伊利尔（1750～1840）初步证明了超越数的存在并指出它的构造方法。1840 年，刘维尔证明 e 不是二次代数数。1844 年，他在巴黎宣读了论文《论既非代数无理数又不能化为代数无理数的广泛数类》，宣布了超越数的存在并实际构造出一批超越数。

例如复数 $z = \sum_{n=1}^{\infty} g^{-n!}$ 对 $g = 2, 3, \cdots$，都是超越数；

又如刘维尔数

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} a_k / 10^{k!} = 0.a_1 a_2 0\ 00 a_3 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ a_4 00\cdots$$

（a_k 是 1～9 之间的任意整数）是著名的超越数。

1874 年，康托尔（1845～1918）利用反证法给出了刘维尔定理的新证明，而且超越数“大大多于代数数”。从而奠定了超越数理论的稳固基础。

刘维尔在 1844 年较先猜测自然对数的底 $e=2.71\,828\cdots$是超越数，但没有给出严格证明。1873 年，埃尔米特证明 e 是超越数，但却未能证明 π 是超越数。林德曼于 1882 年在《数学年鉴》上用实质上和他相同的方法证明了 π 的超越性。林德曼证明 π 超越性的论文有《关于鲁道夫数》和《关于数 π》两篇。

7.1 的 6. 说，如能证明 π 是超越数，则尺规作图法无法化圆为方。由此可见，化圆为方的研究促进了超越数理论的研究，超越数理论的研究又解决了化圆为方。

虽然 e 和 π 的超越性已先后得到证明，并能实际构造出另外一些超越数，但有关超越数的研究还远未结束。例如，人们还远远无力证明任意一个具体的数是不是超越数。因这比构造出一个超越数困难得多。举例来说，现在还不知道欧拉常数 γ 是不是超越数，甚至是不是无理数也还不知道。又如，1929 年，盖尔丰德证明了 e^{π} 是超越数，但 e^{e}，π^{π}，π^{e}，甚至 $e\pi$，$e+\pi$的超越性至今也不清楚，但已经证明 $e+\pi$ 和 $e\pi$ 至少有一个是超越数。再如，有时看似超越数的数却不是超越数，例如 $e^{i\pi}$看似超越数，实际上 $e^{i\pi}=-1$。

1900 年，在巴黎召开的第二次国际数学家大会上，希尔伯特（图 7-17）提出了著名的 23 个问题，其中第 7 个问题就是某些数的无理性和超越性问题：如果 α 是不等于 0 和 1 的代数数，β 是无理代数数，那么 α^{β} 是不是超越数？1929 年，盖



图 7-17　希尔伯特

尔丰德证明了：如果 α 是不等于 0 和 1 的代数数，β 是二次复代数数，那么 α^{β} 是超越数。而特例为 $e^{\pi}=(-1)^{-i}$即 $e^{\pi}=i^{-2i}$是超越数。1930 年，苏联数学家库兹明（1891～1949）和德国数学家西格尔（1896～1981）同时把这个结果推广到 β 是二次实代数数的范围，特例为 $2^{\sqrt{2}}$ 是超越数。1934 年，盖尔丰德和德国数学家施奈德（1911～）用不同方法分别对希尔伯特第 7 问题的后半部分作了肯定的证明，这被称为盖尔丰德-施奈德定理。这就肯定了前述欧拉凭直觉的猜测。1955 年，英籍德国数学家罗斯（1925～　）发表了《对于代数数的有理逼近》，彻底解决了用有理数逼近无理数的问题，把创立了 30 多年的这一理论发展为罗斯定理或瑟厄-西格尔-罗斯定理。罗斯也因此和其他成就荣获 1958 年菲尔兹奖。1966 年起，英国数学家贝克(1939～　)得到了比盖尔丰德更一般的结果，也因此荣获 1970 年菲尔兹奖。

人们常将 e 和 π 同时进行研究的又一实例是，1941 年，美国怀俄明州卡斯佩尔公司的总工程师米夫·布特勒（Miff Butler）在作品 Geomath 中，宣称发现了 π 和 e 之间的关系，并声明他的工作是在美国发展起来的第一个基础数学原理。他还让国会议员们在此前的 1940 年 6 月 5 日把它录成会议录音带。

由此可见，化圆为方、对超越数的研究、数学发展等问题

互相促进、相互影响。而希尔伯特第 7 问题又是 20 世纪促进它们进一步发展的强大动力。正如希尔伯特所说：“只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满生命力，而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡和终止。”

7.4 π 与近似计算

利用 π 和弧度制带来了许多近似计算的实用方法，现举例如下：

用 π 和弧度制计算任意角的正弦值。如果你身边没有电子计算机，没有算三角函数的函数型计算器，没有数学用表，您能算出任意角的三角函数值吗？也许多数人会回答：“不能。”下面这种方法能告诉你计算的方法。利用苏格兰数学家麦克劳林（1698～1746）发现的正弦展开式 $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \cdots$，可以计算任意角准确到任意位数的正弦值，并可由此算出其他角的三角函数值。以下通过实例说明具体做法。

计算准确到小数点后 5 位的 $\sin 10°$的值。先 $10°$将化为 $\pi/18$ 弧度，按麦克劳林展开式，就有：$\sin 10° = \sin \pi/18 = \pi/18 - (\pi/18)^3/3! + (\pi/18)^5/5! - \cdots$。由此，就可以算出

$$\sin 10° = \sin \pi/18 = 0.174\ 533 - 0.000\ 886 + 0.000\ 001$$
$$= 0.173\ 648 = 0.17\ 365$$

它就是所需求的值。还可进而求得 $\cos 10° = 0.984\ 81$ 和其他三角函数值。

第二个近似计算的实例是在堆垒数论即加性数论的整数分拆（即分析）中。

要解答的问题是：把任意自然数 n 分成若干个自然数的和，问分法的个数 p（n）如何计算？当 n 值较小时，我们可以一个个列出来解答这个问题。例如当 $n=2$ 时，分法只有 $2=1+1$ 这一种，即 $p(2)=1$。然而，当 n 很大时，却难以用这种一一列出的方法解答。这个看来无“公式”可言的问题，可以由欧拉的近似公式 $p(n)=e^{\pi\sqrt{2n/3}}/(4n\sqrt{3})$ 来解决。

第三个近似计算的例子是阶乘的近似计算公式，见8.4。

7.5 π与连分数、最佳逼近理论

我们在5.3的4. 中谈到，祖冲之的355/113，是在分母小于16 604的所有分数中最接近π准确值的分数，下面证明这一点。

有关连分数（式）的理论，华罗庚在《数论导引》（科学出版社，1979）第十章中有详论，有兴趣的读者可参阅。

据载，中国汉代三统历（公元前104年）时，就有了连分数术。在五六世纪，印度的阿耶波多用连分数解过一次不定方程。1572年，意大利数学家邦贝利（约1526～1572）在其《代数学》一书中首次用连分数表示一个数的平方根近似值，其例为$\sqrt{2}=[1, 2, 2, \cdots]$。沃利斯在1695年的《数学著作集》中最先使用“连分数”这一名称，他还给出了连分数收敛计算的一般法则。布龙克尔则将沃利斯的一个无穷乘积式变为π的一个连分数。而欧拉于1737年和兰伯特于1761年给出的连分式在4.2中已经谈到。

欧拉还在1748年的《无穷小分析引论》一书中，给出级

数和连分数互化的一般方法。这部著作奠定了连分数的理论基础。兰伯特也证明了 $\tan x$ 连分数展开式的收敛性。1768 年，拉格朗日在一篇文章中，证明了二次方程的实根是周期连分数即循环连分数的定理。而他在 1776 年《论数值方程的解法》一文中，用连分数给出了求方程无理根的近似方法，在同年的另一篇文章中，则巧妙地用连分数给出了一个微分方程的近似解。自拉格朗日之后，连分数的应用越来越引起人们的注意和重视，成为解决许多问题的重要工具。例如，e，π 是无理数都首先是用连分数法证明的。

连分数按一级级近似值展开，可得到一串渐近分数，例如 $\pi=[3, 7, 15, \cdots]$。以下序列（1）为后面要叙述的最佳分数，其中黑体数是展开到 13 级得到的 13 个渐近分数：

3/1，13/4，16/5，19/6，**22/7**，179/57，201/64，
223/71，245/78，267/85，289/92，311/99，**333/106**，
355/113，52 163/16 604，52 518/16 717，52 873/16 830，…，
103 638/32 989，**103 993/33 102**，**104 348/33 215**，
208 341/66 317，…，**312 689/99 532**，…，**883 719/265 381**，…，
1 146 408/364 913，…，**4 272 943/1 360 120**，…，
5 419 351/1 725 033，…，**80 143 857/25 510 582**，… 序列（1）

密率 **355/113** 是其中第4个渐近分数，也是分母不超过 16 604的圆周率的最佳渐近分数，即在分母不超过 16 604 的所有分数中，**355/113** 的值最接近准确 π 值。

最佳分数是最佳近似分数的简称。设分数 P/Q 比一切分母不大于 Q 的分数都更加接近无理数 x，即 $|x-P/Q|<|x-p/q|$（其中 $q<Q$），那么 P/Q 就叫 x 的最佳分数。也就是说，要找一个比最佳分数 P/Q 更接近 x 准确值的分

数，除非分母大于 Q，否则是找不到的。根据连分数理论，每个渐近分数都是最佳分数，所以又称最佳渐近分数。但是，除了渐近分数以外，还有许多最佳分数。例如，的 52 163/16 604就是一个 π 的最佳分数，但不是渐近分数。

现在提出这样的问题：在序列（1）中的第 4 和 5 两个渐近分数 **355/113** 和 **103 993/33 102** 的分母 **113** 与 **33 102** 之间，能不能找到最佳分数的分母，并由此找到最佳分数？答案是肯定的——例如52 163/16 604。再进一步问：在这些 π 的最佳分数中，哪一个分母最小？

根据有理逼近理论，计算出这些分数要用到下面两个定理。

设将 x 展开成连分数，即 $x=[a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots]$。各渐近分数依次是：$p_0/q_0=a_0/1$，$p_1/q_1=(a_0a_1+1)/a_1$，$\cdots$，$p_n/q_n$，$\cdots$，并记 $x_n=[a_n, a_{n+1}, \cdots]$，那么就有：

定理 1 在分母不大于 $q_1=a_1$ 的一切分数中，只有 a_0+1/q [其中 $(a_1+1)/2\leqslant q\leqslant a_1$] 是最佳分数。

定理 2 设 $n\geqslant 2$，在分母大于 q_{n-1}，但不大于 q_n 的一切分数中，只有 $(tp_{n-1}+p_{n-2})/(tq_{n-1}+q_{n-2})$ [其中 $(x_n-q_{n-2}/q_{n-1})/2<t\leqslant a_n$] 是最佳分数。

序列（1）就是根据这两个定理算出来的。

序列（1）按分母从小到大的顺序排列，每后一个都比前一个更接近准确 π 值。可以看出，**355/113** 与52 163/16 604之间没有最佳分数。在 **355/113** 和 **103 993/33 102** 之间共有147个最佳分数，这些最佳分数用 $(355t+333)/(113t+106)$ 求得，其中 $t=146, 147, \cdots, 292$。

再设 A 是所有比 **355/113** 更接近准确 π 值的分数的集合，

A 中最小的分母是 S。如果将 A 中以 S 为分母的分数集合记作 B，那么 B 只可能是有限集，因为在比 **355/113** 更接近准确 π 值的假定下，分子是有界的。对于无理数 π 来说，两个同分母不同分子的分数 R_1/S 与 R_2/S 与 π 准确值的距离必然不相等。所以在有限集 B 中必有与 π 准确值最接近的分数 R/S。现在，证明 R/S 只能是最佳分数。事实上，任取 R'/S'（$S' \leqslant S$），如果 $S'=S$，那么由 R/S 的定义可知，R/S 比 R'/S'（$=R'/S'$）更接近准确 π 值；如果 $S'<S$，同时，R'/S' 又比 R/S 更接近准确 π 值——当然比 **355/113** 更接近准确 π 值，那么 R'/S' 属于 A，而这与 S 是 A 中的最小分母矛盾。这就证明了 R/S 是最佳分数。

由于序列（1）中 **355/113** 以后的全部最佳分数都属于 A，而分母最小的是 52 163/16 604，因此 R/S 就是这个分数。于是得出结论：在分母小于 16 604 的分数中，不存在比 **355/113** 更接近准确 π 值的分数。

再来看 **355/113** 前后几个最佳分数与 π 之间的差的绝对值△：

22/7 = $3.\dot{1}42\,85\dot{7}$，$\triangle_1=10^{-3}\cdot 1.264\cdots$；

333/106 = $3.14\dot{1}\,509\,433\,962\,26\dot{4}$，$\triangle_2=10^{-5}\cdot 8.321\cdots$；

52 163/16 604 = $3.141\,592\,387\cdots$，$\triangle_3=10^{-7}\cdot 2.662\,132\cdots$；

而对循环节 112 位的 **355/113**，$\triangle_4=10^{-7}\cdot 2.667\,641\cdots$。

比较以上△可看出，**333/106** 和密率 **355/113** 的繁简程度差不多，但△却相差约 312 倍；而 52 163/16 604 的△仅比 **355/113** 的△小约 0.2%，但分母 16 604 却约是 **113** 的147倍，显得很繁杂。由此，可看出密率的又一优越性。

此外，中国数学家张景中在 2001 年写给本书作者之一的信中，给出了 16 604 的一个初等证明，现介绍如下：

$\because 355/113 = 3.141\,592\,920\,353\,98\cdots$，$\pi = 3.141\,592\,653\,587\,79\cdots$，

$\therefore 0 < 355/113 - \pi < 0.000\,000\,266\,742\,2\cdots = d$。

设既约分数 q/p 比 355/113 更接近 π：

$\because \pi < 355/113$，

$\therefore 0 < 355/113 - q/p = 355/113 - \pi + \pi - q/p = (355/113 - \pi) + (\pi - q/p) < 2d$，

$\therefore (355p - 113q)/113p < 2d$，即 $p > (355p - 113q)/226d > 0$。

这时，p 和 q 要满足以下条件：

① $355p - 113q$ 是正整数。

② 当 $355p - 113q \geqslant 2$ 时，必有 $p > (355p - 113q)/226d \geqslant 1/113d \geqslant 33\,173$。

③ 当 $355p - 113q = 1$ 时，有 $p > (355p - 113q)/226d \geqslant 16\,586$，即 $p \geqslant 16\,587$。

又由 $355p - 113q = 1$ 得到 $q = (355p - 1)/113$，即 $355p - 1$ 应能被 113 整除。

设 $p = 16\,587 + k$（$k = 0, 1, 2, \cdots$），而

$355p - 1 = 355 \cdot 16\,587 + 355k - 1 = (52\,109 \cdot 113 + 3 \cdot 113) + (67 + 16k)$

即 $67 + 16k$ 为（$355p - 1$）除以 113 的余数。

当 $k = 0, 1, 2, \cdots, 16$ 时，都不满足 $67 + 16k$ 被 113 整除，而当 $k = 17$ 的时候，$67 + 16k = 67 + 16 \cdot 17 = 3 \cdot 113$，此时 $355p - 1$ 能被 113 整除，$p = 16\,587 + 17 = 16\,604$，对应的 $q = (355p - 1)/113 = 52\,163$。

这就证明了 16 604 是比 355/113 更接近 π 的分数中分母最小的一个。

张景中还在《数学家的眼光》一书中，给出了 $p>16\,586$ 的证明，亦可见本套丛书的总序。

茅以升的《中国圆周率略史》记载：德国人苏本在《数学游戏与随笔》中说，分母在 **1000** 以内的整数没有比密率更准确的。台湾省 1982 年出的《环华百科全书》甚至将 16 604 减小到 **113**。这类说法，显然大大低估了密率的优越性。

最后，简单谈一谈最佳逼近理论。它的核心是最佳逼近定理：若 a 为任意实数，而 p_n/q_n 是 a 的连分数展开式中的第 n 个渐近分数，则在分母为 $q\leqslant q_n$ 的一切有理数中，p_n/q_n 是 a 最好的有理近似值，即 $|a-p_n/q_n|\leqslant|a-p/q|$（当 $q\leqslant q_n$ 时）；进一步，还有 $|a-p_n/q_n|\leqslant 1/q_n q_{n+1}$。可以看出，定理的前半部分即前述定理 1；根据定理后半部分可算得△。例如，算第 4 个渐近分数 **355/113** 的 $\triangle=|\pi-355/113|\leqslant 1/(113\cdot 33\,102)=10^{-7}\cdot 2.667\,641\cdots$，而这正是前面的结果。计算时 $q_n=113$，$q_{n+1}=33\,102$。

最佳逼近理论有着广泛的用途。例如，在历法中的"四年一闰，但逢整百年不闰"，就可用这一理论证明。

7.6 π与弧度制

计量角度的方法有"度制"：分周角为360份，每份为1°。"新度制"：分周角为 400 份，每份为 1^g 即 1 新度或称 1 冈（特）——1 grade；在德国则称 gon；新度为法国资产阶级革命后使用。"苏联密位制"：周角的 1/6000 为 1 密位。"英美密

位制”：周角的1/6400为1密位或1密耳——1 mil。也有将周角分为1/（2000π）或1/6300作1密位的。

不过，作为平面角的国际单位制里辅助单位的，却不是上述角度单位，而是“弧度”。它是弧度制里的角的单位。

把周角均分为（2π）份，每份就是1弧度，这种计量角的方法就是弧度制。那么，采用弧度制有什么优点呢？

第一，它可以简化一些公式。例如，计算弧长的公式 $l=\pi\alpha' r/180$（α'为用度制表示的弧长 l 所对圆心角的度数，r 为圆半径），就可以简化为 $l=\alpha r$（α 为用弧度制表示的弧度数）。又如物理学中计算匀速圆周运动的向心加速度 a 的公式 $a=\omega^2 r$（ω 是以弧度/秒为单位的角速度），也是这种简化的结果；否则这个公式就是 $a=(\pi\omega/180)^2 r$（ω 是以度/秒为单位的角速度）。这类例子不胜枚举。

第二，便于三角函数作图。在直角坐标系中作函数图像时，一般要求纵横轴单位选取一致；如果不一致，画出来的函数图像就会“走样”，例如圆会变成椭圆。如果三角函数的自变量用角度制的角度，由于角度制是60进位的，而三角函数值是10进位的实数，就会使画出来的三角函数图像没有统一标准。而如果用弧度制的角度，这时三角函数的自变量和函数都是10进位的实数，就使得三角函数和其他初等函数一样，能方便地在直角坐标系中作图。事实上，人们都是这样做的。

第三，便于建立曲线的极坐标方程 $F(\rho,\ \theta)=0$。它就是根据动点的性质寻求极径 ρ 和极角 θ 的关系式。而建立这种关系式常用极角的三角函数，如常见的圆的渐开线、旋轮线、阿基米德螺线，在弧度制下才得到显见的、简单的形式 $\rho=$

$\alpha\theta$。否则在角度制下的方程将是 $\rho=\pi\alpha\theta/180$。

第四，便于基础科学知识的需要。如果取周角的 $1/K$ 作为度量角的单位，便又出现了一种角的新单位。不失讨论的一般性，设圆的半径为 1，则周长为 2π，单位圆心角所对的弧长则为 $2\pi/K$，于是可得

$$\lim_{x\to 0}\sin x/x=2\pi/K$$

这样，所推得的许多公式都得带个系数 $2\pi/K$。例如 $(\sin x)'=(2\pi/K)\cos x$。为了这类公式的简化，取 $K=2\pi$ 就行了，即圆周角应取 2π 这个量数，也就是采用弧度制。由此可见，它的产生是基础科研的一种必然需要的结果。事实上，许多公式特别是微积分公式都是因此而得到简化的。

第五，利于近似计算，例见 7.4。

第六，导致一个重要的极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x/x=1$ 的诞生。如果不采用弧度制，这个极限将是 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x/x=\pi/180$。前一种简洁形式进行微积分公式的推导，远比后一种方便。

弧度制既然有这么多优点，那它又是怎么产生，由谁创立的呢？

在 6 世纪，印度的阿耶波多把圆周的 $360\cdot 60=21\ 600$ 等分定义单位，并取 π 为 3.1416，然后，由 $C=2\pi R$ 中算得半径的近似值为 3438（3437.738 732…），从而以半径的 1/3438 为单位，来计算三角函数的值。他得到 30°的正弦为 1719，这在当时是最好的结果。容易看出，他的工作中孕育着弧度制的思想。

欧拉最先引入了角的弧度的概念。他在 1848 年的《无穷小分析引论》中，提出三角函数应是对应的函数线与圆半径之比，主张用半径来度量弧长。设半径为 1，则半圆周长就是 π，

所对圆心角的正弦为0。同样，1/4圆周长是π/2，所对圆心角的正弦为1，记作sin（π/2）＝1，这就是现在的弧度制。从此，π又有了新的含义：相当于180°的角度值。而“弧度”（rad）一词，则是爱尔兰著名物理学家威廉·汤姆森（即开尔文，1824～1907）之兄、工程师、化学家詹姆斯·汤姆森（1822～1892），首先于1873年6月5日在贝尔法斯特女王学院的一次考题中创用的。

由半径radius和角angle两字合成radin，缩写为rad。在1935年中国出版的《数学名词》中，radin曾译为“弳”——“弧”、“径”两字各取一半合成，在我国颇为流行。1956年出版的《数学名词》才废除这个字，并定为“弧度”。弧度的符号也几经变换。1881年，霍尔斯特德（G.B.Halsted）用ρ表示弧度单位，例如$3\pi\rho$表示3π弧度。1907年，鲍尔（G.N.Bauer）则用r表示。而在1909年，霍尔（A. G. Hall）等又用R表示。直到1925年，朗尼（S.L.Loney）的《平面三角学》还用π^c表示π弧度，但又声明，为了简便起见，c通常省略不写，近几十年来的三角书都将表示弧度的符号省去，并沿用至今。

7.7 π与圆方率

在平面几何中，正方形面积和它的内切圆面积之比为4∶π（100∶78.54）即约100∶78。这个4∶π即所谓“圆方率”，也称为“方圆比率原理”。“圆方率”实际应为“方圆率”——“方”∶“圆”＝4∶π。

最先明确使用圆方率这一名词的人已无从考查。但是可以

推知，由于正方形的面积容易求得，因此，谁最先求得圆面积，便可以认为他已知道它们的面积之比——圆方率。欧多克索斯运用他创立的穷竭法，证明了两圆面积之比为其半径之比的平方，因此，他实际上已经得到圆面积的计算公式，但不能因此认为他已得到圆方率。因为他对比例系数π不屑一顾。最先实际给出圆方率较准确值的是阿基米德。因为他明确指出了正方形和它的内切圆面积之比为14∶11＝100∶78.6。

刘徽在正方体内纵横两个方向上作其内切圆柱，圆柱的公共部分称“牟合方盖”。牟合方盖与它的内切球的体积之比为4∶π。刘徽也论证了下面几个比都是4∶π：正方形与其内切圆的面积之比，方锥与圆锥的侧面积之比，正四棱台与其内切圆台的体积之比，正四棱柱与其内切圆柱的体积之比，正四棱锥与其内切圆锥的体积之比。他在《九章算术》中指出，“从方亭求圆亭之积，亦犹方幂求圆幂”，这就指出了方圆比率原理应用的广泛性，后来扩充为“截面比率原理”，再后来成为祖暅原理的前身。

20世纪80年代，江苏如皋县城西乡朗庄小学教师陈昭银再次研究了圆方率，他把前人的成果进行归纳、总结和推广：指出正方形与它的内切圆、方柱体与它的内切圆柱体、棱锥与它的内切圆锥体，它们对应的周长之比、面积之比——包括底面积之比、侧面积之比和表面积之比、体积之比都是4∶π。因此，只要知道其中任何一个条件，就能根据4∶π求出相应的另一结果，从而使计算大为简化，甚至过去难以求得的一些结果，也能方便快捷地加以计算。上述结论，显然可以广泛用于各领域涉及“圆”和“方”问题的计算，引起过教育界的注意。

也许有人会认为“4∶π”这太简单了，不值一提，以下这

个趣味故事将告诉我们：并不是每个近现代人都知道这个“4∶π”的！

美国作家杰克·伦敦（1876～1916）在他写的小说《大房子里的小主妇》里，给圆方率提供了趣味的计算题材。

有一段钢杆深埋在田地中央。杆的顶端系着一条钢索，钢索的另一端系在田地边缘的一部拖拉机上。司机压下了起动杆——发动机就开动起来了。

拖拉机向前驶去，以钢杆为中心在它的四周划了一个圆圈。

格列汉说：“为了彻底改善这部拖拉机，您剩下一件事，就是把它所划出的圆形改成正方形……对了，这样的耕作方法在方块的田地上，会荒废掉许多土地的。”

格列汉做了一些计算，然后他发现，“几乎每十英亩要损失三英亩之多”——1 英亩合 4046.86m^2。“不会比这少的。”

格列汉的计算结果正确吗？设正方形田地边长是 a，那它的面积是 a^2，它的内切圆面积为 $\pi a^2/4$。这样，剩下部分的面积是 $(1-\pi/4)\cdot a^2$，取 $\pi=3.14$，得答案 $0.22a^2$。

可见，正方形田地里未经耕种的部分，不是杰克·伦敦所写的 30%，而是 22%！

由杰克·伦敦的错误计算，我们可以得到一个“貌不惊人”的结论：生活在 19、20 世纪的近现代人，并不是个个都知晓圆方率及其应用的，即使他生活在欧美发达国家。

7.8 π与空隙

谁也不怀疑 π 值是一个常数，但却不一定都能灵活运用。

不少人对“π 是常数”在实际上的认识比理论上肤浅得多。下面举出四个趣题来说明这一点。

（1）分别沿篮球和地球的表面大圆箍上一条铁丝，再分别把两条铁丝加长 1 米，问：谁与铁丝间的空隙大？不少人会不假思索地回答：当然是篮球与铁丝之间的空隙大。当问及“为什么”时，这些人将会回答：因为地球太大了，铁丝加长 1 米，根本不算一回事，不会对空隙产生大的影响；而篮球很小，铁丝加长 1 米，会使空隙加大很多。这个回答全错。设篮球和地球半径分别为 r 和 R，显然分别是一样大的两个空隙：

$(2\pi r+1)/(2\pi)-r=1/(2\pi)$ 和 $(2\pi R+1)/(2\pi)-R=1/(2\pi)$

（2）如果你站在半径为 r 的月球上不动，但却随月球自转绕大圆一周；类似，你在半径为 R 的地球上也作一样的转动。问：你的头比脚在哪个星球上经过的路程要多些？也许你认为月球小，地球大，当然在地球上转一周时头比脚多经过的路程要比在月球上多些。但事实是，两种情况下头比脚多经过的路程是一样的——与星球大小无关。

（3）一根铁丝捆在地球赤道上，然后把它放长 0.5 米，如图 7-18，问：这时它与地球之间的平均空隙可否通过一只老鼠？如果凭“直觉”回答，也许这个空隙会小于一根头发丝的话，那就错了。事实上，这个空隙为 0.5 / (2π) 米——约 8 厘米，足以让一般老鼠通过。


图 7-18

（4）地球被一根钢丝在

赤道上紧捆起来，接着把钢丝冷却 1℃——这时钢丝的长度要缩短约 10^{-5}，钢丝缩短但没有断裂，也没有被强行拉着不缩短，问：它将切入地球多深？

初看起来，像这样微小的温度变化，似乎绝不会使它切入地球很深，但计算结果却与这一“初看”大相径庭。

由于钢丝总长 $4\cdot10^7$ 米——地球赤道的大约长度，所以缩短值为 $4\cdot10^7\cdot10^{-5}$ 米 = 400 米，半径将比原来小 400/（2π）米 = 64 米。因此，因钢丝冷却 1℃ 之后，切入地球的深度是 64 米，而不是“绝不会使它切入地球很深”。

那为什么想像与事实相去甚远呢？这是由于对“π 是常数”的认识仅仅停留在“理性”上，没有通过具体的问题进行感性体验的缘故。事实上，“π 是常数”，意味着半径增大或减少“多少”，周长都增加或减少 2π 个“多少”，而不管原来的半径有多大。

有了这种认识，不经过计算就可以回答以下趣题：假设地球半径增大 100 米，会不会把捆在它赤道上的一条绳子撑断？这条绳子最多允许伸长 10^{-5}，否则就会被撑断。答案是：不会。

类似的一个问题是，设想一条绳子贴着地面绕在地球赤道上，如果把它加长 1 米，容易看出来吗？如果新绳子上每一点离地面一样高，那么，新绳子离地面有看得出来的距离吗？

7.9 π 与转圈悖论

把硬币 A 不打滑地绕大小一样的不动硬币 B 的边缘转动

一周，问A转了几圈？如果回答"1圈"的话，那就错了！事实是"2圈"——这就是著名的"硬币悖论"。类似的情况，我们称为"转圈悖论"。

取8个大小相同的硬币，排成图7-19，让其中最下面那一个M绕另外6个固定不动的硬币不打滑地滚动。问：M绕它们滚完一周时，M自己转了多少圈？我们约定"自己转了1圈"是指转了360°。例如，如果圆周上一点在右，转动后这一点又第一次向右，则"转了1圈"；在第二次向右时，则"又转了1圈"，等等。

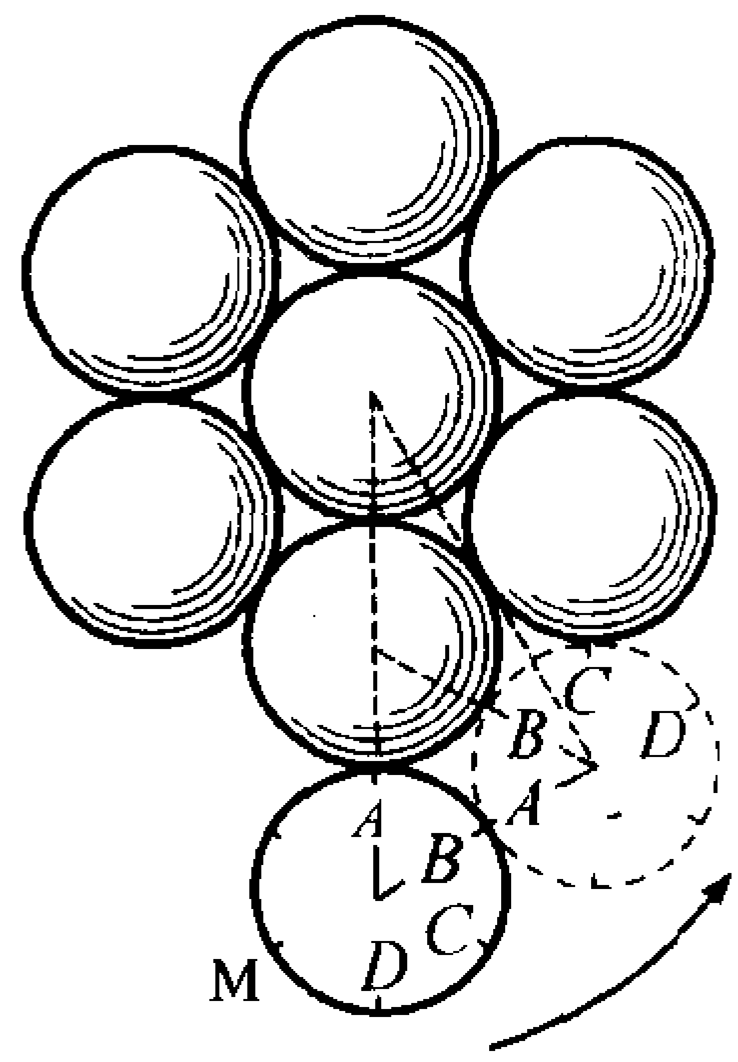


图7-19

"用事实说话"的结果是4圈。下面来"计算"一下，M一共走多少弧线。为此，我们设M由"顶点"A向邻近两个圆之间的"小凹地"移动，不难看到，M沿滚动的弧AB包含60°的角。每个固定圆上有两个这样的弧，两者相加，就是120°或等于圆周的1/3。因此，M在环绕每个固定圆的1/3圆周时自己也转了1/3圈。由于固定圆有6个，所以M转了2圈。这个答案竟和刚才实验的结果不一样！于是，我们不得不承认"说话的事实"而寻找"计算"中的错误。那么，错在哪里呢？

把M无滑动地沿着长度为1/3圆周的直线上滚动时，M的确只转1/3圈。但是，如果M是沿着曲线——圆周、圆弧或折线滚动时，刚才的说法就错了。在上题中，M绕相当于它的圆周的1/3圆弧旋转时，自己一共转了2·1/3圈＝2/3圈，而不是1/3圈。因此，M绕过6个这种弧线时，就自转4

圈了。这个结果，可以从下列叙述得到解释。

图 7-19 中的虚线表示 M 绕完⊙O 上的弧 AB 时的位置。这时 M 的最“高”点已不是原来的点 A，而是虚线圆中的点 C 了。从虚线圆中的点 A 和 C 的位置关系不难看出，M 各点都转动了 120°即 1/3 圈。那么，定圆上有两个 60°的“路程”，这就相当于 M 转了 2/3 圈。因此，如果 M 沿着非直线转，那么它就要转出和沿同样长直线转时不同的圈数。

下面，我们从图 7-20 来说明这个似乎令人难以置信的、奇怪的几何事实。

设半径为 r 的⊙O 沿一直线滚动，它在和它的周长 $2\pi r$ 相等的线段 AB 上正好滚一圈。现在 AB 的中点 C 如图 7-20 将 AB 弯折，使 CB 与原来的方向成 α 的角。于是⊙O 从 A 出发转了半圈之后就到了 C，但它要转到 CB 上去，就必须多转 α 角：图 7-20 中两个 α 角有彼此互相垂直的两边而相等。

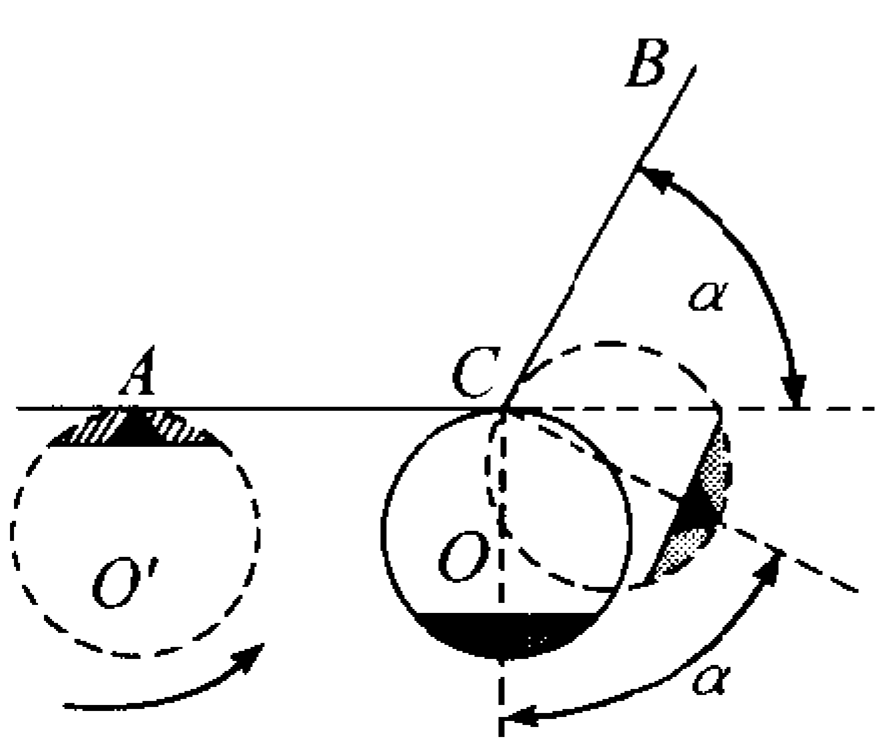


图 7-20

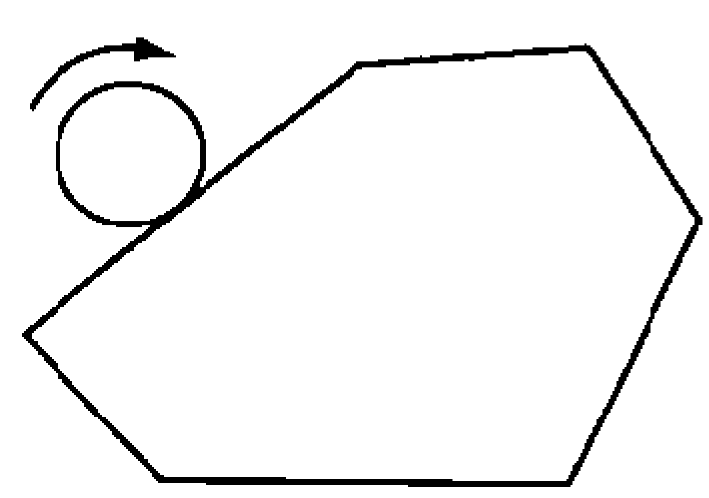


图 7-21

在这个转弯过程中，⊙O 并没有沿线段滚动，但的确多出来一个旋转角 α 来。那么这个 α 是多少圈呢？由于一圈是 2π 角，α 角就等于 $\alpha/2\pi$ 圈。看，神奇的 π 就在“转圈”

中出现了！接下去，⊙O 又在CB 上转了半圈，因此⊙O 在整个折线ACB 上一共转了 $1+\alpha/(2\pi)$ 圈——α 以弧度计量。

由此可知，一个绕凸多边形（正多边形或图 7-21 所示任意多边形）外边滚动的圆绕完各边后转的圈数，应是它在与各边总长相等的直线上所转的圈数，再加上这多边形外角的和除以 2π 的商这么多圈。而任何凸多边形外角的和恒为 2π，而 $(2\pi)/(2\pi)=1$。这就是说，圆在任何凸多边形外边滚动时，滚动一周后它自转的圈数，要比它在与这多边形的周长相等的直线上自转的圈数多一圈。例如，设图 7-21 中圆和多边形周长分别为 5 和 25，那么，圆绕着多边形转一周时自转了 $(25/5)+1=6$ 圈。

当凸多边形边数无限增加便成了圆，因此一个圆绕另一个等大的圆转一周后，它自己自转了 $(1+1)$ 圈；绕另一个直径为它 3 倍的圆转一周后，它自己自转了 $(3+1)$ 圈，等等。

于是我们得出结论一：一个“圆”绕一条凸封闭曲（或直）线外侧无滑动地滚动时，它自转的圈数是（封闭线总长/“圆”周长）+1 圈。

再来看图 7-19 那类由一些等直径圆弧组成的曲线的情况。由前述分析可以得到结论二：一个“圆”绕一条由同它等直径圆弧组成的凹封闭曲线一周时，自己自转的圈数是“圆”在其中任一个圆所接触的弧上滚动的圈数·固定圆的个数·2 圈。在算“固定圆的个数”时，只能算“圆”所接触的圆，不能算没接触的圆，即图 7-19 正中那个不能算。

比如，在图 7-22 中，⊙O 绕另外三个圆组成的曲线上滚动一周时，因为⊙O 在⊙B 上滚动了 180°即 0.5 圈，所以它

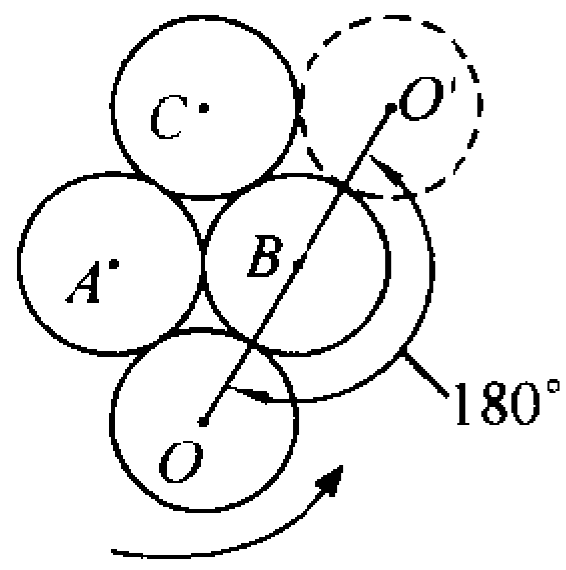


图 7-22

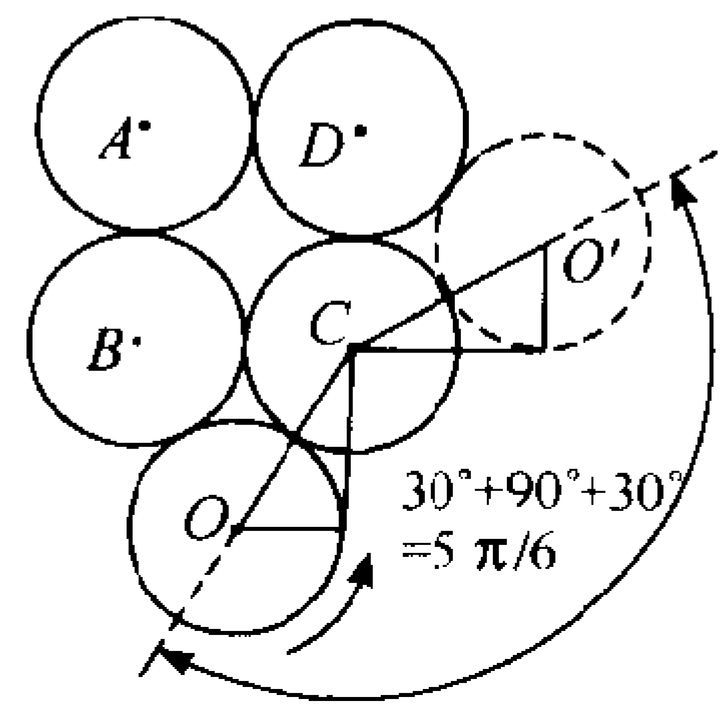


图 7-23

自转的圈数是 0.5·3·2＝3 圈。又如，在图 7-23 中，⊙O 绕由另外 4 个圆组成的曲线滚动一周时，它自转了 4·2·（5π/6）/（2π）圈＝10/3 圈。

◎第八章

好伙伴形影不离——无处不在的 π

这个奇妙的 3.141 59 溜进了每一扇门，冲进了每一扇窗，钻进了每一个烟囱。

——德·摩尔根

π 是一个奇迹般的数，数学公式、定理、法则……中几乎无处不在。不仅如此，在本章中还会看到它在科海中漫游。

8.1 π 与伯努利难题

雅格布·伯努利是伯努利数学家族的佼佼者。他对无穷级数很有研究，也求出过一些无穷级数的和。但求 $1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots$ ——“伯努利级数”却一筹莫展。于是他声称，如果谁能把求和方法告诉他，他将非常感激。但他终未如愿，直至“含恨到九泉”。

伯努利死后两年，欧拉降临人世；他用奇妙、大胆的类比求得这个和为 $\pi^2/6$。看，π 又出现在一个似乎与它毫不相干的伯努利级数求和问题中！以下是欧拉的求法。

假设有一个 $2n$ 次代数方程

$$b_0 - b_1x^2 + b^2x^4 - \cdots + (-1)^n b_n x^{2n} = 0 \quad (8.1)$$

(8.1) 式有 $2n$ 个不同的根 $\pm\beta_1$，$\pm\beta_2$，...，$\pm\beta_n$。如果两个代数方程有相同的根，而且常数项相等，那么这两个方程其他项的系数也应该分别相等，就有

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - \cdots + (-1)^n b_n x^{2n}$$
$$= b_0(1 - x^2/\beta_1^2)(1 - x^2/\beta_2^2)\cdots(1 - x^2/\beta_n^2)$$

比较上式两边 x^2 的系数，就得到

$$b_1 = b_0(1/\beta_1^2 + 1/\beta_2^2 + \cdots + 1/\beta_n^2) \quad (8.2)$$

考虑三角方程 $\sin x = 0$，它有无穷多个根：0，$\pm\pi$，$\pm 2\pi$，…。将 $\sin x$ 展开为级数后，方程两边除以 x，就得到

$$1 - x^2/3! + x^4/5! - x^6/7! + \cdots = 0 \quad (8.3)$$

显然 (8.3) 式的根是：$\pm\pi$，$\pm 2\pi$，…。

本来 (8.3) 式的左方有无穷多项，明显与代数方程 (8.1) 不同。但欧拉不管这些，硬拿 (8.3) 式与 (8.1) 式类比，并对 (8.3) 式运用 (8.2) 式，就得到 $1/3! = 1/\pi^2 + 1/(2\pi)^2 + 1/(3\pi)^2 + \cdots$。这个式子就是有名的 $\pi^2/6 = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots$。这就解决了伯努利难题。其结果刊登在 1734 年的一篇文章中。

对于自己的“高招”，欧拉曾不无得意地说：“类比是伟大的引路人。”

欧拉的类比虽然巧妙、大胆，但却有失严密。因为，虽然“一元 n 次方程有 n 个根”成立，但既无“一元无限次方程有无限个根”的定理，也不知道一元无限次方程根与系数的关系。欧拉自己也认识到这一点，因此，他不为求得答案而满足，而是采用其他方法继续研究，以回答文章发表后当时一些

人对他的诘难。这些人指责他上述将有限项方程过渡到无限项方程缺乏可靠的逻辑依据。他的研究包括：①把级数和算到小数点后 6 位：1.644 934，这与 $\pi^2/6$ 的前 7 位值相同；②用前述类比法算出其他级数和，并同样计算出小数点后多位，其值也符合得很好；③最终找到求该级数和其他级数和的严格方法，并发表在他于 1748 年在瑞士洛桑出版的《无穷小分析引论》之中。

伯努利级数和，以及表 6-2 中类似的级数和都与 π 有关，这不能不说是一个神秘的现象——为什么不是与诸如自然对数的底这些常数有关呢？

欧拉大胆地将有限推向无限进而得出正确结论的“歪打正着”，给我们两点启示。

首先，不能局限于现成的理论裹足不前，不敢越雷池一步。否则便会错过碰到鼻子尖的真理，丧失做出新发现的时机。要敢于突破，像欧拉那样；要敢于猜想，像哥德巴赫和费马做出其后人们以他们姓氏命名的猜想那样。经验虽然“有限”，但很可能是“无限”真理的一部分。阿贝尔在 1826 年写道：“在数学中几乎没有一个无穷级数的和是以严格的方式确定出来的”。所以，要敢于冲破“有限”，直取“无穷”，进而得到真理。

其次，光有大胆还不够，因为确定真理要经过严格的逻辑证明。舍此，像欧拉这样的大家也会写出“可怕的公式”：$0 = 1^n - 2^n + 3^n - 4^n + \cdots$（$n$ 为自然数）；对 1 亿亿个数的验证，也不能证明“1 + 1”。所以，在把有限推向无限之后，应寻求严格的逻辑证明。

8.2 π与伯努利数

雅格布·伯努利于1679～1685年在概率论方面的研究成果、1689～1704年完成的五篇关于级数的文章，被收集在他的《猜度术》中。这本早期概率论的重要著作在他死后8年才由他的一个侄儿——他的二弟约翰·伯努利（1667～1748）的儿子尼古拉·伯努利（1695～1726）即尼古拉第三，在1713年出版。此书著名之处在于其中第四部分给出了概率论中的伯努利大数定律。而在第二部分中则利用“伯努利数”给出了一个求整数的自然数次幂之和的著名公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = n^{c+1}/(c+1) + n^c/2 + \binom{n}{1}B_2 n^{c-1}/2 + \binom{n}{3}B_4 n^{c-3}/4 + \cdots \tag{8.4}$$

（8.4）式中的$B_2 = 1/6$，$B_4 = -1/30$，……称为“伯努利数”。

雅格布·伯努利不但给出了计算伯努利数的递推公式，而且还应用（8.4）式成功地求得前1000个自然数10次方幂的和，即

$$\begin{aligned}&1^{10} + 2^{10} + \cdots + 1000^{10}\\ &= 91\ 409\ 924\ 241\ 424\ 234\ 424\ 241\ 924\ 242\ 500\end{aligned}$$

当然，这个32位数用通常方法算工作量是很大的。因此，伯努利对他的公式极为欣赏，曾不无得意地说：布里阿德（1605～1694）编纂的大部头著作《无穷算术》是多么劳而无功，他在书中用了九牛二虎之力才算出1～1000的前6次方幂和，而我只不过用1页纸，七八分钟就算出上述结果。

当然，求整数方幂和有时并不需要准确值，这时可用以下近似公式计算

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = (n + 1/2)^{c+1}/(c + 1)$$

它是布尔诺（B.L.Burrow）和塔尔伯特（R.F.Talbot）在 1984 年发现的。如果用它算出 S_{10}（1000），就可得到 $9.141\,04 \cdot 10^{31}$。它和前述准确值比较，相对误差仅约

$$(9.141\,04 - 9.140\,99) / 9.140\,99 = 5 \cdot 10^{-6}$$

此外，还有一个更为准确的近似公式，但更繁而没有在此写出。对这两个近似公式有更多兴趣的读者，可读《乘电梯·翻硬币·游迷宫·下象棋》一书。

现在，伯努利数通常用欧拉后来给出的一个关系式来定义

$$t(e^t - 1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n / n!$$

伯努利数满足 $B_n = 0$（$n \neq 1$ 且为奇数）及“伞形法则”$B_n = (1 + B)^n$，而 $(1 + B)^n$ 指的是 $C_n^0 B_0 + C_n^1 B_1 + \cdots + C_n^n B_n$。这样，我们就可以求得

$B_6 = 1/42$，$B_8 = -1/30$，$B_{10} = 5/66$，$B_{12} = -691/2730$，

$B_{14} = 7/6$，$B_{16} = -3617/510$，$B_{18} = 43\,867/798$，

$B_{20} = -174\,611/330$，$B_{22} = 854\,513/138$，

$B_{24} = -236\,364\,091/2730$，$B_{26} = 8\,553\,103/6$，

$B_{28} = -23\,749\,461\,029/870$，$B_{30} = 8\,615\,841\,276\,005/14\,322 \cdots$

而 $B_0 = 1$，$B_1 = -1/2$；n 为其他奇数时 B_n 为 0。

伯努利死后，不但他的难题留给了欧拉；他的上述成果也被欧拉利用和发展。1704 年，欧拉得到 π 与伯努利数联系的最精美的结果

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} = B_{2k}(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}/[2 \cdot (2k)!] \quad (8.5)$$

由 (8.5) 式可以得到以下三个事实：

① 知道伯努利数就可以求得 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$。例如，我们知道 $B_{12} = -691/2730$，就得到表 6-1 中的 (34) 式 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-12} = 691\pi^{12}/638\,512\,875$。

② 知道 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$，就可求得对应的伯努利数 B_{2k}，这又多了一种求伯努利数的方法。

③ 由 (8.5) 式可以明显地看出 π 与伯努利数神秘地联系在一起了，而这正是本节的主题。

伯努利数还与黎曼函数 $\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + \cdots$ 有关——π 与黎曼函数结伴同行。这里提到的黎曼 (1826～1866) 是德国数学家。

有趣的是，当 $\zeta(s)$ 中 s 为偶数时，都有简洁的公式：$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots = \pi^2/6$，$1 + 1/2^4 + 1/3^4 + \cdots = \pi^4/90$，…。但 s 为奇数时，却没有类似简洁的公式。而且，$1 + 1/2^3 + 1/3^3 + \cdots$，$1 + 1/2^5 + 1/3^5 + \cdots$，却没有发现和 π 相关。事实上，$1 + 1/2^1 + 1/3^1 + \cdots$ 就发散于 ∞，与 π 无关。

这是一个谜：为什么自然数的偶自然数次幂倒数之和必然与 π 有关，而自然数的奇自然数次幂倒数之和不是如此？直到 1878 年，法国数学家阿佩尔 (1855～1930) 才证明了 $\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + \cdots$ 是一个无理数。我们要问：其他的和又是什么？

德国数学家库默尔 (1810～1893) 还发现，伯努利数与费马大定理有着重要联系。

8.3 π与欧拉公式

被称为欧拉公式的公式多得不胜枚举，本节标题中是指 $e^{i\pi}=\cos x+i\sin x$。

意大利数学家邦贝利是最早承认虚数的人。他对三次方程进行长期研究后于 1572 年给出了 $\pm\sqrt{-1}$ 和 $a+b\sqrt{-1}$ 的计算法则，从而将数系推广到虚数和复数领域。

但是，当时人们对实数、虚数、对数函数、指数函数、三角函数之间的关系，并没有深刻的认识而找到有机的联系。直至 1714 年，牛顿的学生、英国数学家科特斯（1682～1716）才给出 $ix=\ln(\cos x+i\sin x)$ 这一包含数与函数之间联系的式子。

1740 年 10 月 18 日，欧拉在给约翰·伯努利的信中指出，$y=2\cos x$ 和 $y=e^{ix}+e^{-ix}$ 都是同一个微分方程的解，应该相等。1743 年，欧拉又得到下列也被称为欧拉公式的公式：$\cos x=(e^{ix}+e^{-ix})/2$，$\sin x=(e^{ix}-e^{-ix})/2i$。1748 年，他在名著《无穷小分析引论》中又重新发现了上述科特斯的结果并写成现代形式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，这使人们更进一步明确了实数、虚数、对数函数、指数函数、三角函数之间密切的联系。他设式中 $x=\pi$，便得到著名的 $e^{i\pi}+1=0$。

在这个式子里，数学中最著名的“五朵金花”0，1（都来自算术），i（来自代数），π（来自几何），e（来自分析学）妙不可言地同时绽开，两个最著名的超越数结伴而行，实数和虚数熔于一炉，被称为“整个数学中最卓越的公式之一”（克莱因），和数学中“最优美的公式之一”。怪不得卡斯纳

(Edward Kasner) 和纽曼 (James Newman) 在《数学和想像力》一书中认为：它可能是“世界上最短也是最有名的公式……无论是神秘主义者、科学家、哲学家、数学家，都能感受到它的魅力”。由它还得出 $e^{2i\pi}-1=0$。这个式子更是巧妙地让 0，1，2，i，π，e 这“六大明星”同台献艺，它和盖尔丰德的 $e^{\pi}=i^{-2i}$，欧拉的 $i\ln i=-\pi/2$ 有异曲同工之妙。

8.4 π与斯特林逼近

1730 年，棣莫弗（1667～1754）发表的《分析杂论》中，首先对 $n!$ 的一个无穷级数展开式给出近似公式 $n!=\sqrt{2n\pi}(n/e)^n$，这里，我们看到 π 又“莫名其妙”地出现在一个与它“毫不相干”的算式中。但它却被称为“斯特林逼近”，因为苏格兰数学家斯特林（1692 或 1696～1770）在同年的《微分法或无穷级数的简述》中也给出等价的级数。

斯特林不但给出了级数的前 5 个系数，还给出了决定后面系数的递推公式。他只用了级数的前几项，就算出了 lg（1000!）等于 2567 加上一个精确到小数点后 10 位的小数，进而求得 1000! 的近似值。下面我们来看如何利用斯特林逼近来进行阶乘的近似计算。

由公式有 $1000!=\sqrt{2\cdot 1000\pi}\cdot(1000/e)^{1000}=79.27\cdot 367.88^{1000}$。

等式两边取常用对数，有 lg（1000!）= 2567.7。由此可知，1000! 是一个 2568 位数，这也是斯特林当年得到的结果。

由此可见，要计算很大的数的阶乘值，受位数限制而不能用电子计算器直接算出时，可以用这一公式近似地求出。

可见，在斯特林逼近中，也出现了 π 和 e “熔于一炉”的现象。在这里，给出一个更有趣的 π 和 e “熔于一炉”的式子：$\pi^4+\pi^5=e^6$。它的趣味之处是，各指数呈 4，5，6 的递增等差数列。

8.5 π 与黄金分割

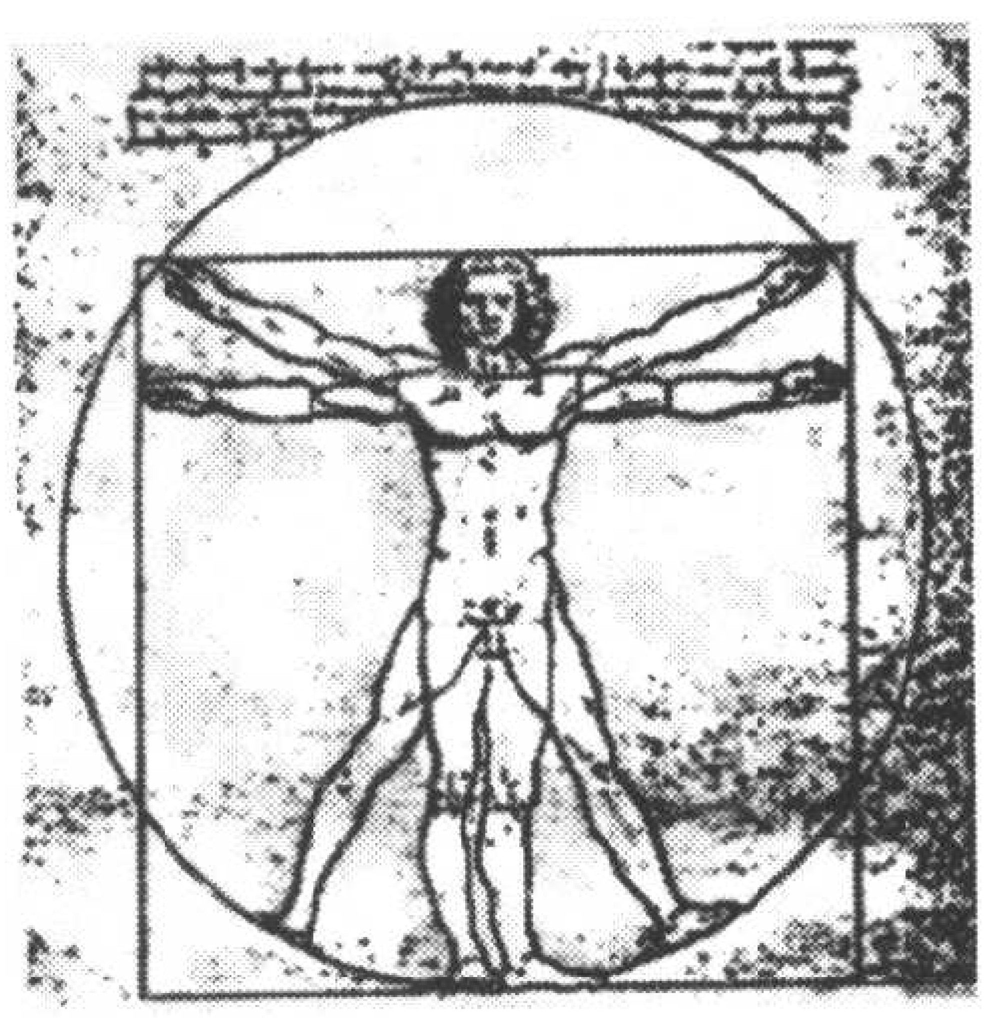


图 8-1

将一条已知线段分为两段，使其中长的一段是短的一段和已知线段的比例中项，这种分割称为“黄金分割”。它最早是由毕达哥拉斯学派在研究正五边形作图法及其性质时发现的。意大利数学家帕乔利（1454～1514）在他于 1509 年出版的《神奇的比例》一书中重新提到它。而这一名称最早是他的同胞达·芬奇（1452～1519）给出的。图 8-1 是达·芬奇为《神奇的比例》所作的插图。

但是，在书中最早正式使用这个名称的却是我们熟悉的电学大师欧姆——西蒙·欧姆（1787～1854）的弟弟——德国数学家马丁·欧姆（1792～1872）。他在 1835 年第二版的《纯粹初等数学》中正式使用德文词“goldene schnitt”（黄金分割）。

黄金分割虽然不像一些人吹的那样神乎其神，但它在数学以至整个科学中的应用却比比皆是。那么，它与 π 有没有联系呢？这也是一个诱人的问题。

设“黄金比”（$\sqrt{5}-1$）/2 = m，将长宽高分别为 m，

1，$1/m$ 即分别约 0.618，1，1.618 的长方体称为“黄金长方体”。不难算出，它的表面积 S，对角线，外接球半径，外接球表面积 T 分别为 $4m$，2，1，4π。这样，我们看到 $S:T=m:\pi$。这就是说，黄金长方体的表面积与其外接球的表面积之比为 $m:\pi$。这就把“黄金比”这个无理数 m 和超越数 π 奇妙地联系在一起了——这种联系不是来自代数，而是来自几何。

π 与 m 的联系并非仅上一例。詹姆斯·利根在 The Mathematics Teacher 中，介绍了他发现的二次曲线中的黄金比。它的要点如下：

如果椭圆的焦点在圆的直径两端，那么椭圆短半轴 b 与长半轴 a 的比为何值时椭圆与圆面积相等？答案是 $b:a=m$。这样的圆称为“焦距圆”，这样的椭圆称为“黄金椭圆”。

在平面直角坐标系中，设 N 为黄金椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 与圆 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 在第一象限中的交点，用 Φ 表示射线 OA（O 为坐标中心）与 x 轴正向的夹角，就有

(1) 椭圆面积 $S=\pi mb^2$。

(2) 点 N 的坐标为：$(b, b/\sqrt{m})$。

(3) $\tan\Phi=\cos\Phi=1/\sqrt{m}$，$\sin\Phi=1/m$。

上述结果使发现者詹姆斯·利根大为诧异：黄金比 m 竟出现在他所想像的“π的王国”——二次曲线中！

詹姆斯·利根所得到的结果属于平面问题。现要问：对于空间问题，有没有相应结果？回答是肯定的。下列结果表明，m 在另一个“π的王国”——二次曲面中也要出现。

设一个旋转椭球的三个半轴分别为 a，b，b，另一个旋转椭球三个半轴分别为 b，$\sqrt{|a^2-b^2|}$，$\sqrt{|a^2-b^2|}$。设这两个椭球

的体积相等，不难得出 $a/b = m^{\pm 1}$的结论。这时，我们不难算得前一“黄金椭球”（后一椭球称为“焦距椭球”）的体积 $V = 4\pi b^3 m^{\pm 1}/3$。你看，黄金椭球的体积把 π 与 m 联系在一起了！

8.6 π 与曲线长度

如图 8-2，有一条全部由无穷多个半圆组成的波浪形曲线，左边最大的一个半圆的半径是 0.9，往右各半圆的半径依次是它的 1/10，即分别是 0.09，0.009，0.0009，…

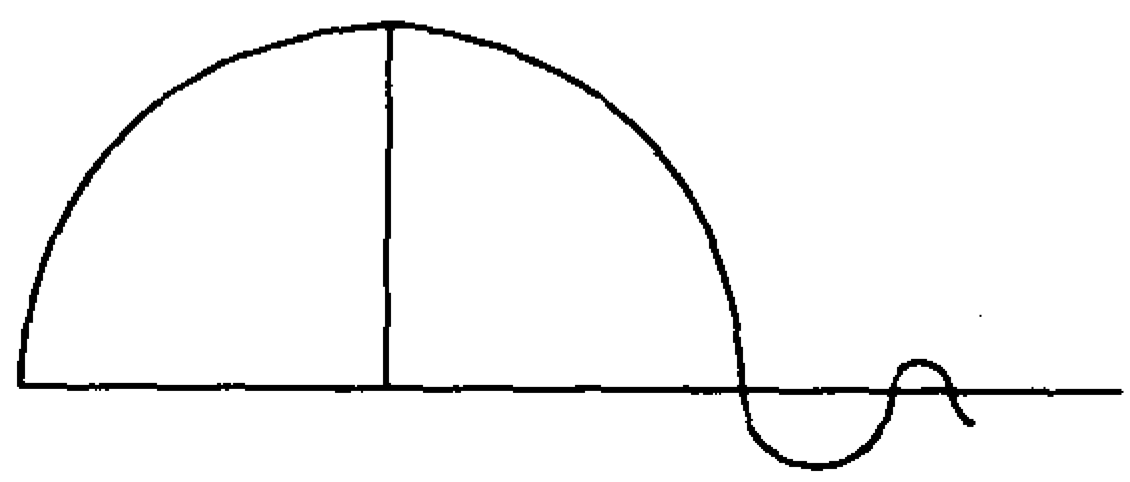


图 8-2

虽然半径越来越短，但显然不会是 0。

现在问这条波浪形曲线有多长？解答这个问题并不难，只要算出$\pi(0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots)$等于多少，就行了。

当然，由于$0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots = 1$，我们容易知道答案是 π。看，π 又在这里“跳了出来”！当然，π 在这里“跳出来”是必然的，因为每个半圆的长度表达式中都含有 π。

那么，有没有那种不含圆（或椭圆）、圆弧（或椭圆弧）的曲线的长是 π 呢？

8.7 π 与曲线图形面积

有关圆或其中一部分的问题要涉及 π，这已不足为奇，

奇怪的是，求许多非圆或圆弧围成的图形面积时，也会出现π。

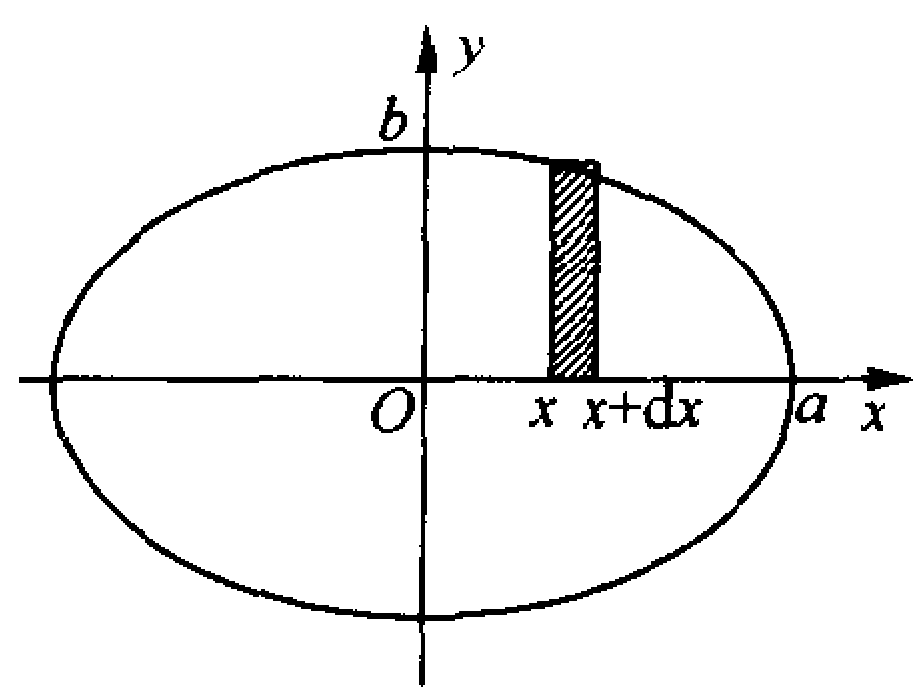


图 8-3

求图 8-3 椭圆 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 的面积。显然，只要先求出它在第一象限的面积 A，再 4 倍即可。由于阴影部分曲边梯形的面积为 $y\mathrm{d}x$，故 $A = \int_0^a y\mathrm{d}x$，利用椭圆的参数方程和定积分换元法，就可以得到椭圆面积 $S = 4A = \pi ab$。可见，出现π是求面积过程中积分运算的必然结果。

求图 8-4 阿基米德螺线 $r = a\theta$ ($a>0$) 上，相应于 θ 由 0 变到 2π 的一段弧与极轴围成图形的面积 A。有

$$A = \int_0^{2\pi} (a^2\theta^2\mathrm{d}\theta)/2 = 4a^2\pi^3/3$$

可见，π也是计算中积分运算的结果。

求图 8-5 心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ ($a>0$) 所围图形面积 A。有 $A = 2\int_0^{\pi}(a^2/2)\cdot(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta = 3\pi a^2/2$。出现π还是求面积过程中积分运算的结果。

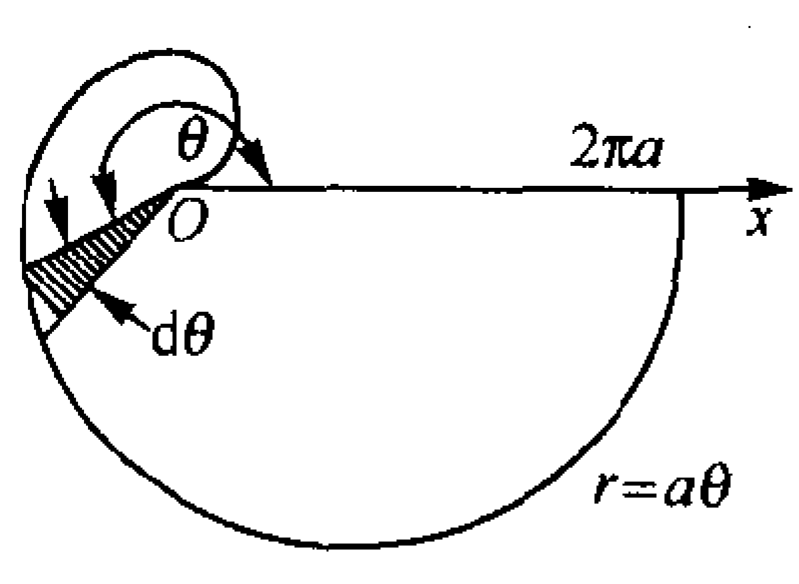


图 8-4

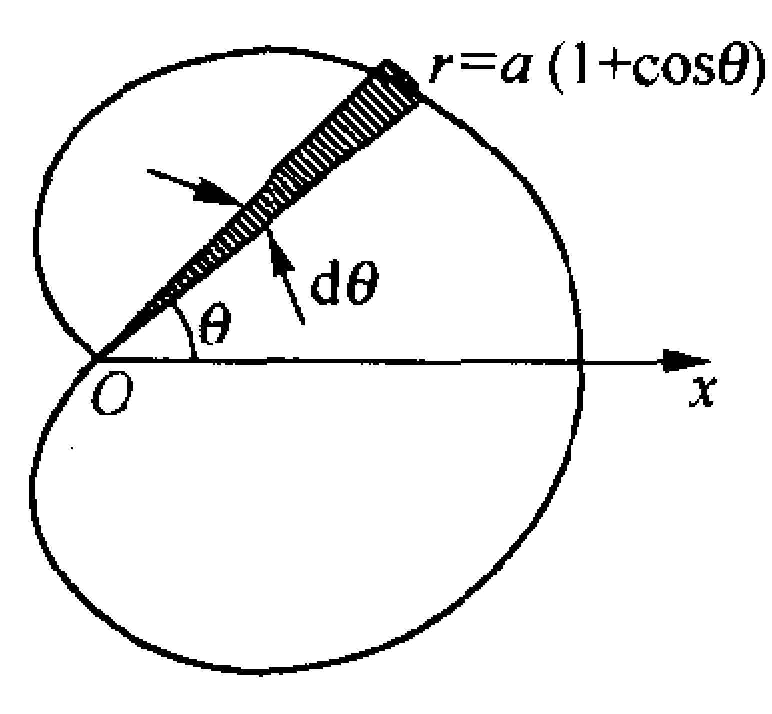


图 8-5

求图 8-6 抛物线 $x^2 = 4ay$ 与箕舌线 $y = 8a^3/(x^2 + 4a^2)$ $(a>0)$围成的图形面积。用积分运算就得到$A = 2a^2(\pi - 2/3)$。看，π 在积分运算中又出现了。

如果你计算$y = 4/(1 + x^2)$的图像曲线与 x 轴所夹的面积在$x = 0$与$x = 1$之间的那部分，就会发现这个曲边梯形的面积也正好是 π。

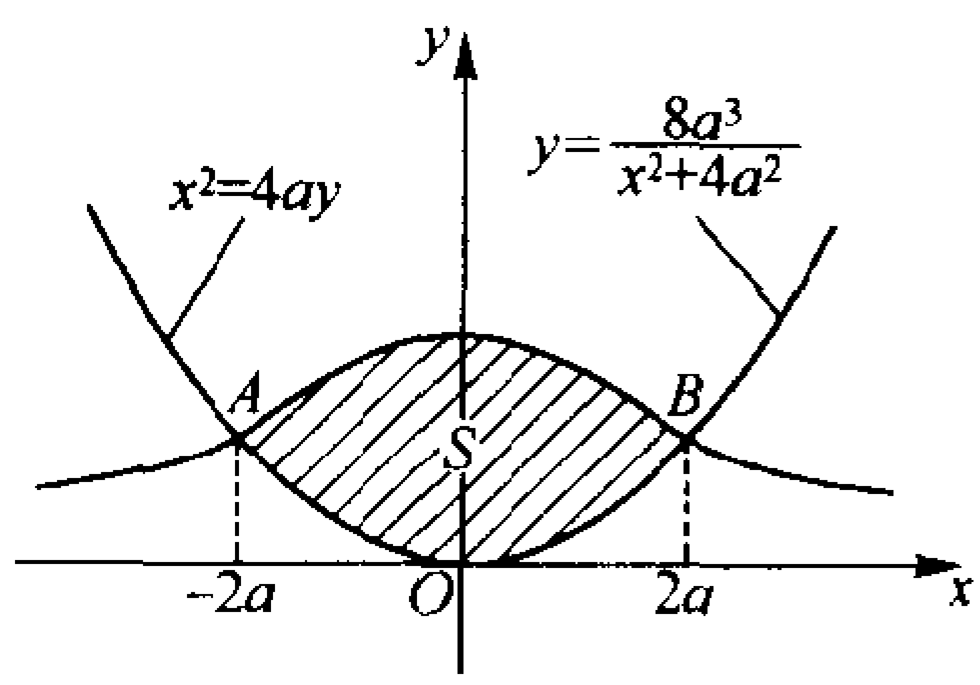


图 8-6

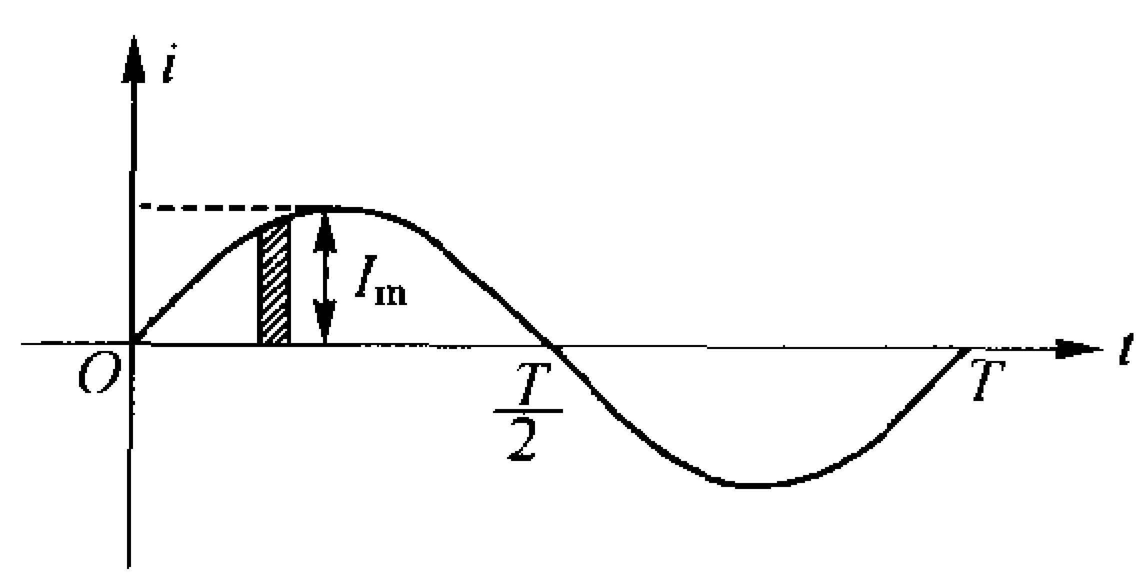


图 8-7

我们再来看一个名例：求正弦交流电的平均值。这相当于求正弦曲线所围成的曲线图形面积。图 8-7 所示正弦交流电正负半周是对称的，所以在一个周期内交流电的平均值为 0，这种含义的“平均值”没有什么意义，而前述平均值则是先分别取正负半周的绝对值再平均，这是有意义的；这种平均值又叫均绝值。因此，要求它的平均值，先要求得正半周的平均值。可以算得电流I的平均值是

$$I_{\mathrm{PJ}} = \int_0^{T/2} I_{\mathrm{m}}\sin\omega t\,\mathrm{d}t/(T/2) = 2I_m/\pi$$

即平均值是最大值的 $2/\pi = 0.637$ 倍；这个倍数关系对电动势和电压也存在。这里，π 又“神秘莫测”地出现在计算结果之中了。

π 出现在曲线形面积之中的例子已不胜枚举，问题是：哪

些曲线形面积中含有 π，哪些不含 π？有无简单的规律加以描述？

回答这个问题可不简单。

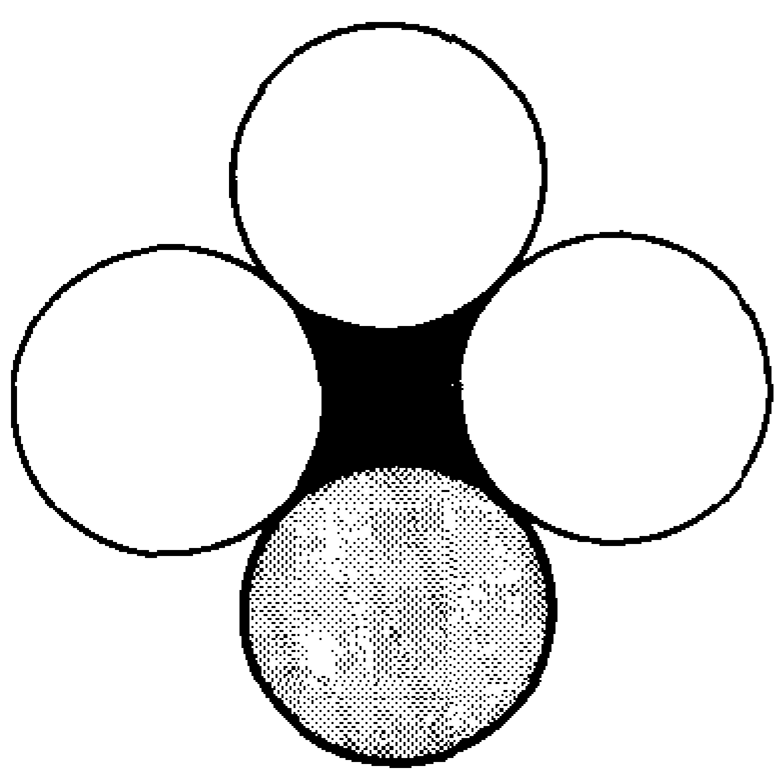


图 8-8

像图 8-8 中涂黑部分那样由单位圆的圆弧组成的“水壶”（它就是 7.1 的 2 里的“花瓶”）形的面积，竟与 π 毫无关系。答案是：“水壶”形的面积为 4—— 一个整数！而这类例子也不胜枚举：“摆线”的长度等于旋转圆直径的 4 倍，与 π 无关；“旋轮线”一拱下的面积正好为生成圆面积的 3 倍，也与 π 无关；7.1 的 2 中提到的希波克拉底月牙形和一个圆的面积之和是一个正方形，也与 π 无关。

8.8 π 与旋转体的体积

由曲线绕某一轴旋转所成的旋转体的体积是否也与 π 有关呢？我们来看两个实例。

图 8-9 所示椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转椭球体的体积是 $V=\int_{-a}^{a}(\pi b^2/a^2)(a^2x^2)\mathrm{d}x=4\pi ab^2/3$。可见，旋转椭球体的体积公式中有 π。

求图 8-10 所示星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$围成的星形绕 x 轴所产生的旋转体的体积 V。由原星形线方程可得 $y^2=(a^{2/3}-x^{2/3})^3$，所以 $V=2\int_0^1\pi(a^{2/3}-x^{2/3})^3\mathrm{d}x=32\pi a^3/105$。可见，星形线旋转体的体积公式也含有 π。

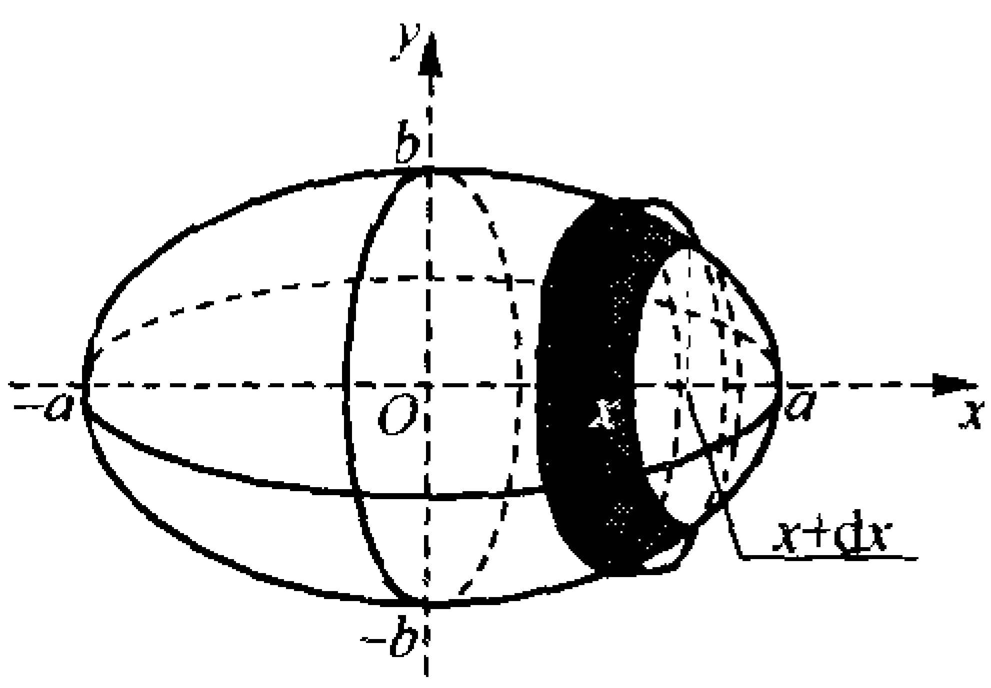


图 8-9

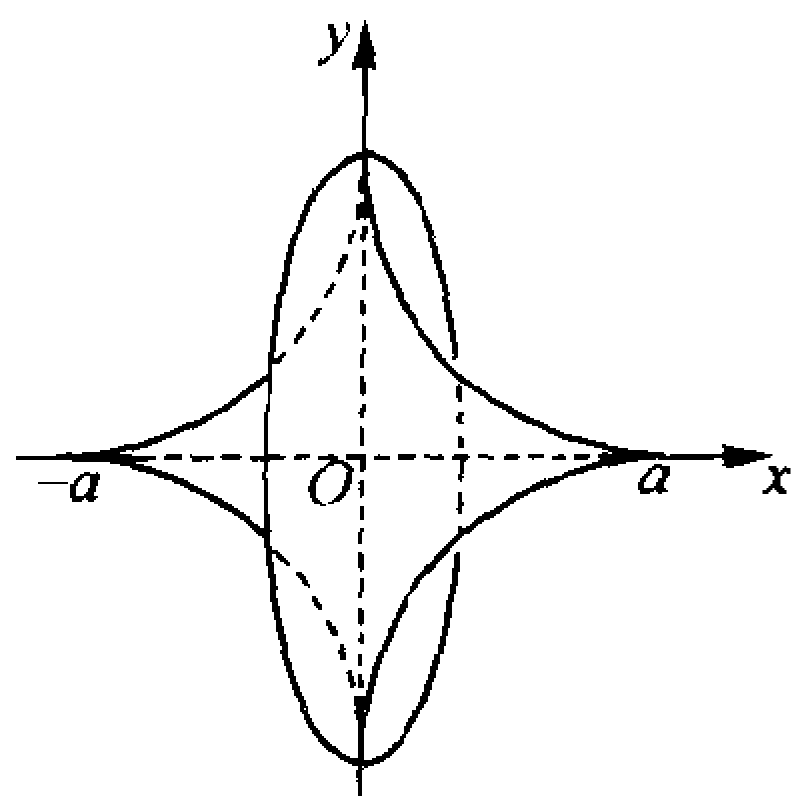


图 8-10

对许多旋转体体积公式中都含 π 的研究后猜想：任何旋转体的体积公式中都有 π。以下为证明。

设图 8-11 所示任意曲线 $y=f(x)$，它在区间 $[-a,\ b]$ 上绕 x 轴旋转，并与垂直于 x 轴的两个平面（这两个平面由 $x=-a$ 和 $x=b$ 绕 x 轴旋转而成）的一部分构成一个旋转体。其体积微元即阴影部分的体积就是 $\pi y^2\mathrm{d}x$，所以

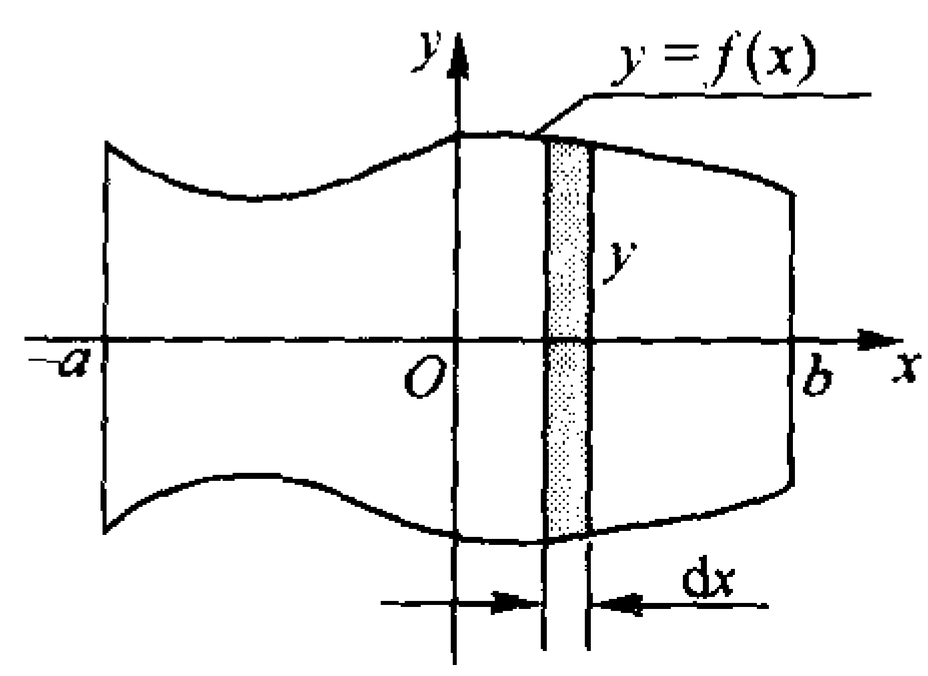


图 8-11

这个旋转体的体积 $V=\int_{-a}^{b}\pi f^2(x)\mathrm{d}x$。结果中必然包含 π。

8.9 “数学天空”任 π 飞

π 在数学中“十处打锣九处在”。

几何中凡是有关圆、球、旋转体的体积等有关公式中必有 π。

π 在数学其他分支中的频繁出现和广泛应用不胜枚举。傅里叶在 1811 年将偏微分方程的解表示为傅里叶积分形式 $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_{0}^{\infty}\cos q(x-t)\mathrm{d}q$，其中有 π；著名的傅里叶级数

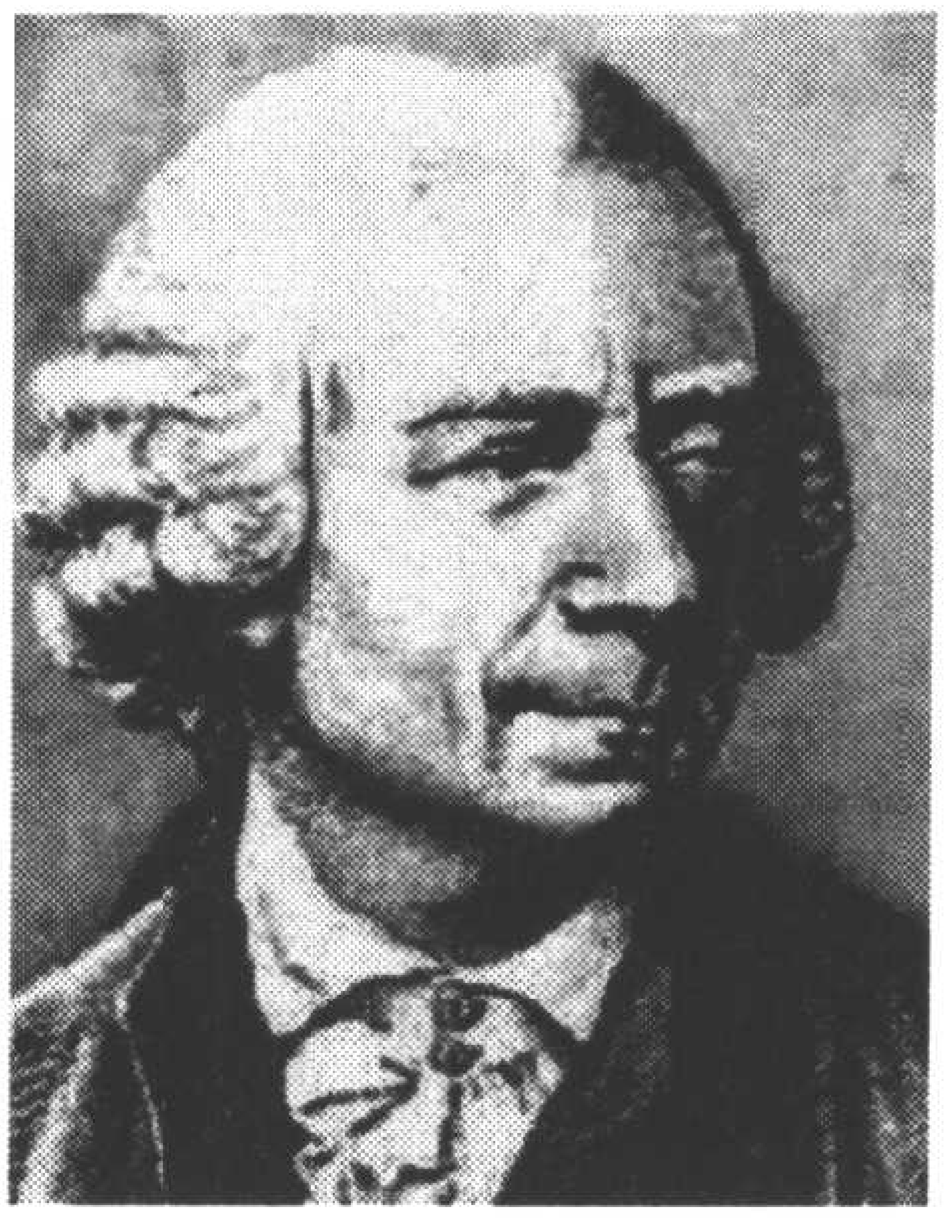


图 8-12　欧拉

中也有 π；概率积分 $\int_{-\infty}^{60} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ 或 $\int_0^{\infty} e^{x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$ 中也出现了 π；推垒数论中也有含 π 的公式 $p(n) \sim \left(\frac{1}{4n\sqrt{3}}\right)e^{\pi\sqrt{2n/3}}$。1781 年，欧拉（图 8-12）给出欧拉第二积分，其中 Γ 函数里也有π——例如 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$；以下两个和式中也“奇怪”地出现了 π：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}-2\right)\right] = 3-2\ln 2-\ln\pi$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n^2\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)+1\right] = \ln\pi-\frac{2}{3}$$

概率论中，有 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ 和 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\cdot e^{-(x-m)^2/(2a^2)}$（$a$ 和 m 为常数，$a>0$）。两式分别为标准正态分布的概率密度和正态分布曲线，式子中也有 π。

总而言之，π 早已深入到数学的各分支、各领域中：函数变换、奇异积分、椭圆函数、概率论、非欧几何……正如陈省身所说：“π 这个数浸透了整个数学。”

8.10 “科学海洋”任 π 游

在电学中，库仑（1736～1806）定律和电场强度公式中有π……

在原子物理学中，α 粒子在原子库仑场中的偏转公式中有

π，电子轨道运动的频率公式中有 π……

在热学中，麦克斯韦速度分布律中有 π，分子的算术平均速率公式中也有 π……

在流体力学中，细管内黏滞流体流量的泊肃叶（1799～1869）公式即泊肃叶-哈根（1797～1884）公式中有 π，黏滞流体阻力的斯托克斯（1819～1903）公式中也有 π……

在光学中，照度定律、夫朗和费（1787～1826）单缝衍射合振幅公式中也有 π……

量子理论中最基本的方程，有海森堡（1901～1976）、薛定谔（1887～1961）的两种形式：$pq-qp=h/2\pi i$，$p=[h/(2\pi i)]\cdot[2/(2q)]$。妙不可言的是，其中都有 π。

布朗运动是科学中出现 π 的又一有趣名例。布朗（1773～1858）是英国植物学家。1827 年春，他用显微镜观察水中悬浮的花粉时偶然发现布朗运动。这一涉及生物、化学、物理、数学等学科的现象，引起了许多科学家的研究。1905 年，爱因斯坦和波兰物理学家斯莫卢霍夫斯基（1872～1917）等，给出了布朗运动的概率公式，其中有 π。1908 年，法国物理学家贝林（1870～1942）用 1903 年由西登托普夫（1872～1940）和瑞士齐格蒙弟（1865～1929）发明的超显微镜观察到上述爱因斯坦等理论预测的结果，结束了 2000 多年来原子是否确实存在的争论。一个植物学家的偶然发现，引起化学、物理及其分支统计力学、数学及其分支概率论等多学科的研究，并由此引出一系列重大成果，的确是美谈趣事。对此，科学界常津津乐道。

◎第九章

增智能健身心——π的奇趣

大千世界，无奇不有。

——中国谚语

9.1 杀人魔逢π栽跟斗

两位法国数学家伽罗瓦（1811～1832）和鲁柏是一对事业上互相勉励、生活上相互关心的好朋友。经济上相对富有的鲁柏经常接济伽罗瓦。

伽罗瓦思想进步，言论激进，1831年7月14日，他就因此被冠以“反政府罪”被第二次关监。次年4月29日出狱后，他去找老朋友鲁柏借宿，可看门女人告诉他，两周前鲁柏已经被人杀害，家里汇给他的巨款被洗劫一空。伽罗瓦听后十分悲痛。他问看门女人，杀人凶手是否被抓到？现场有没有留下什么线索？看门女人告诉他，警察勘察现场时，只看到鲁柏手里紧紧捏着她送给他的没吃完的半个苹果馅饼，令人费解。她认为凶手很可能就在该公寓内，因为案发前她一直在值班室里，没外人进来。不过，这座四层楼的公寓每层有15间房，共住100多人，情况复杂，而这很可能就是警方至今没有破案的原因。

伽罗瓦低头沉思了片刻，便请看门女人带他到楼上，走到三楼 314 房，便停了下来。他问："这房间谁住过？"看门女人回答："是米塞尔"。"此人如何？""他爱赌钱，好喝酒，昨天已经搬走了"。"真可惜他走了，这个米塞尔就是凶手！"伽罗瓦肯定地说。

看门女人听后十分惊奇地睁大了眼睛，忙问："有什么依据？"伽罗瓦分析说："鲁柏手里未吃完的馅饼就是一条线索；馅饼，英语叫 pie，而它在希腊语中就是圆周率 π。人们在计算时常取的 π 值是 3.14，鲁柏是一位喜欢数学且善于思考的人，临死前他终于想到利用现成物品来暗示杀人凶手所住房间的号码 314，所以他便紧紧捏住馅饼不放。"

根据伽罗瓦的分析判断，警方立即搜查了米塞尔的新住所，并逮捕了他。经审讯，米塞尔承认因赌输了钱，又看到鲁柏家里汇来了巨款，遂生谋财害命之杀机。但万万没想到，此案却被数学家伽罗瓦用 π 破获了。这真是法网恢恢，疏而不漏。

9.2 π 中素数有几何

如果不考虑小数点，将 π 值在任意位数上中断，能否得到素数？

研究结果很有趣，而且使人惊奇。至今只发现了四个素数：3，31，314 159 和 38 位的"天文数字"

31 415 926 535 897 932 384 626 433 832 795 028 841

最后一个是 1979 年发现的，地点在美国伊利诺大学。发现人是罗伯特·贝利（Robert Baillie）和马文·旺克勒利希（Marvin Wunclerlich）。罗伯特·贝利还计算了前 432 位的 π 值，

再也没发现素数。

更有趣的是，前三个素数颠倒过来，依然是素数：3，13，951 413。

有没有第 5 个或更多个由 π 值形成的素数？至今仍然是一个有趣的谜。

在前 1000 万位 π 值中至少出现过 6 次的上述 314 159，是一个奇特有趣的素数。它是一个“逆素数”，即将其颠倒顺序书写后的 951 413 也是一个素数；它的各位数的补数组成的 6 位数即 796 951 也是一个逆素数；314 159 是三个素数 31，41，59 连写而成；且更有趣的是，这三个素数都是“孪生素数”，即分别与它们差 2 的 29，43，61，也分别是素数！31，41，59，这三个数的和 131，这三个数的立方的和 304 091 也都是素数；而且，很可能它们的 5 次方的和 859 409 651 也是素数。

9.3 π 与奇数如此巧合

将最小的三个奇数 1，3，5 分别重复一次得到 113 355，这是一个完全由奇数组成的奇数，将其“平均”置于分母与分子上，则得到密率 355/113。看，π 完全浸透在奇数之中！有趣的巧合是，如果把 355/113 分子的百位数与个位数对调、分母的百位数也与个位数对调，再在分母的个位数上加 1，则得到新的分数 553/312，其值为 1.772 435 8…，它的前五位数字正好与准确 π 值的平方根——1.772 453 8…的前五个数吻合，而且后三个数字仅仅顺序不同而已！

约率 22/7 也是一个有趣的与奇数有关的近似 π 值。将 22/7 写成 3 + 1/7，可看出它完全是由奇数构成的。1/7 是一

个有趣的数，化成小数是 $0.\dot{1}42\ 85\dot{7}$。当用 2，3，4，5，6 与它相乘时，仍然是那六个数字组成，仅仅各数字的位置变了而已。具有这种性质的数并不多，下一个具有这种性质的数是 $1/17=0.0588235294117647\cdots\cdots$

9.4 π 与根式这样"多角恋"

准确 π 值不能用一个有限的带根号的简单式子表达出来，因为它是超越数。

但是，人们却发现 π 能用一些简单的根式——这里指带根号的数近似表示出来。例如多次提到的 $\sqrt{10}=3.162\cdots$，可以表示两位准确 π 值 3.1。而 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=3.146\cdots$，5.2 的 2.（32）的 $\sqrt{2}/0.45=3.142\cdots$ 和（36）的 $88/\sqrt{785}=3.140\cdots$，都可以表示 3 位准确 π 值。$\sqrt[3]{31}=3.141\ 38\cdots$ 则表示 4 位准确 π 值。7.2 的 6. 中 $(\sqrt{30}/10+\sqrt{6}/2)^2=3.141\ 607\cdots$ 可准确到小数点后 4 位。最后，$13\sqrt{146}/50=3.141\ 591\cdots$ 则可表示 6 位准确 π 值。

那么，还有没有更准确的表示 π 近似值的根式呢？有的。把 1，2，3，4 四个数排成 2143 后除以 22，再将所得的商开 4 次方，即 $\sqrt[4]{2143/22}=3.141\ 592\ 653\cdots$，正好是 π 的前 10 位值。能表示前 10 位 π 值的还有拉马努金的 $\sqrt[4]{9^2+19^2/22}$。不过，两者本质一样。

9.5 西文字母里藏迹隐踪

难道 π 与外文字母还有什么关系吗？这又是一个趣味问题。

如果将26个英文字母如图9-1按顺时针方向排成一个圆圈，再将其中左右“轴对称”的字母——例如A，H等拿掉。这样，剩下的字母就形成五个小的字母集团。

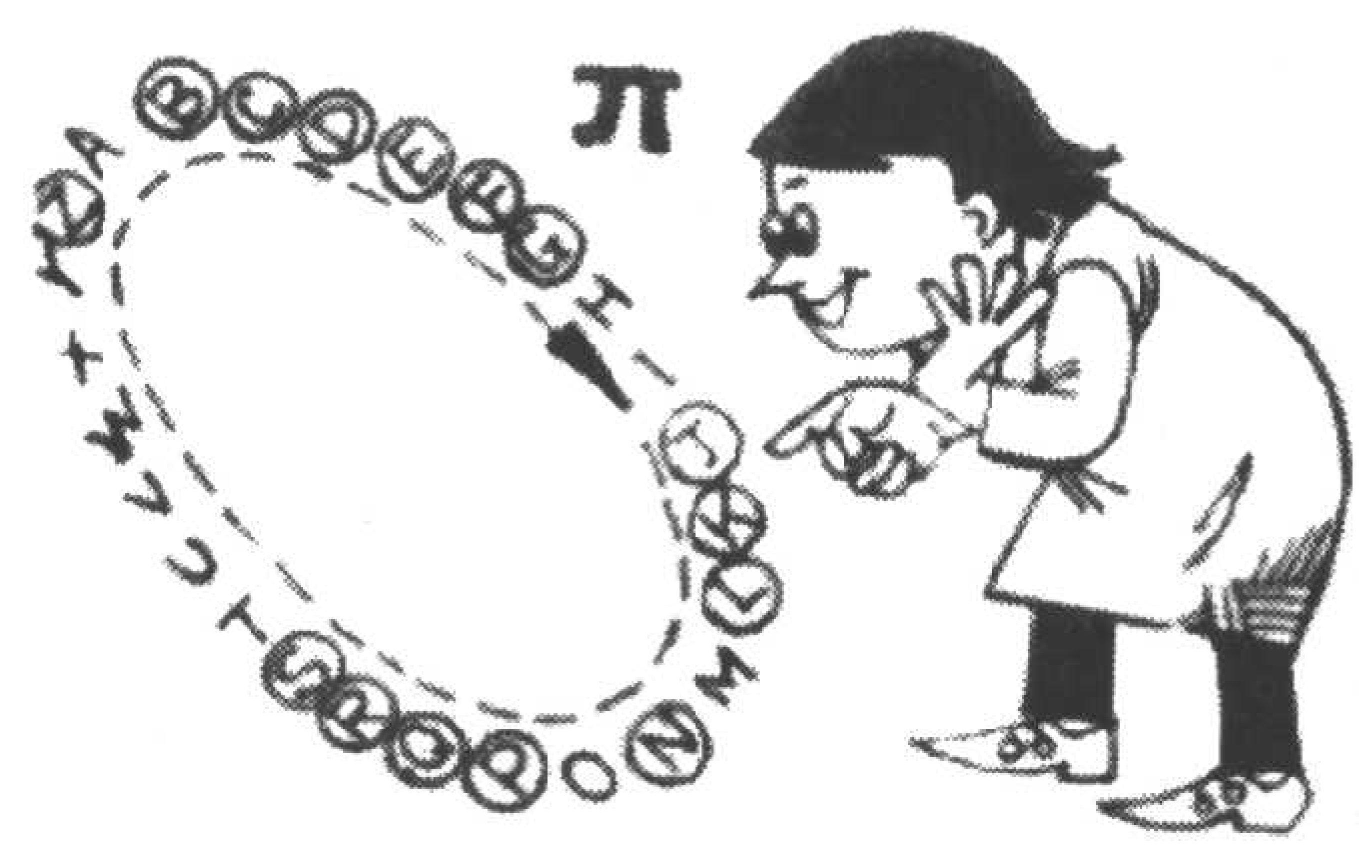


图 9-1

人们有趣而惊奇地发现，如从J开始顺时针方向数一下各小集团中所含字母的个数，分别是3，1，4，1，6个，就按这个顺序，恰好能组成前5位π值——3.1416。

您说这是不是奇妙的巧合？发现这个巧合的痴迷者是美国《科学美国人》“数学游戏”专栏作家马丁·加德纳（1914～　）。

另一个巧合是由希伯来文可以得到π的近似值。

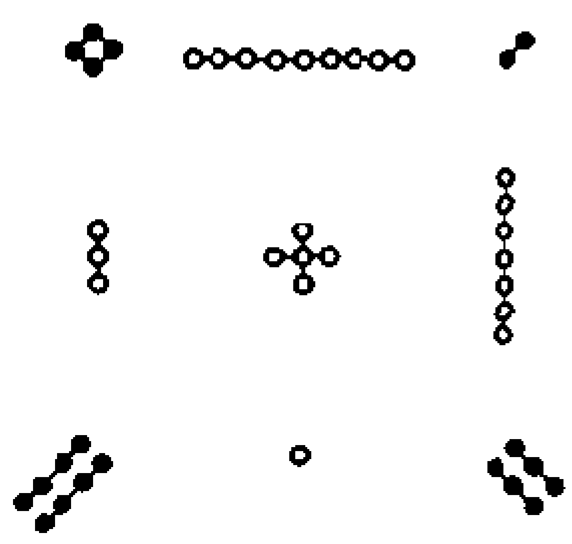
希伯来文的“圆周”一词，由Qof，Vaf和He等字母构成，但却读作Qof，Vav。将这两个拼音中字母代表的数值各自相加后，就分别得到111和106。111 · 3 = 333，而333/106就是我们将在11.6中提到的圆周率“最佳渐近分数”的第三个，它的值是3.141 509…

9.6 纵横图中的秘密

纵横图又叫幻方或魔方，它是一些具有奇妙性质的数字组

成的图案，属于早期组合数学的内容，至今已被应用于程序设计、图论、人工智能、对策论、组合分析等领域。

幻方的发明权，举世公认属于中国。中国数学史上流传的神话称之为“洛书”。古籍《论语》、《周易·系辞》上均有记载。图 9-2 所表示的三阶幻方，最早出现在公元前约 500 年的《大戴札记》。东汉数学家徐岳（约 3 世纪）所著《数术记遗》中把它称为“九宫”。宋代数学家杨辉（约 13 世纪）所著《续古摘奇算法》等书中称之为“纵横图”，唐代以后开始称为“洛书”。



4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 9-2

那么，π与幻方又有没有联系呢？罗别克（T.E.Lobeck）构造出图 9-3 左边的幻方，发现了幻方与π之间有趣的联系。

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

⇄

2	4	3	6	9	24
6	5	2	7	3	23
1	9	9	4	2	25
3	8	8	6	4	29
5	3	3	1	5	17
17	29	25	23	24	

图 9-3

左边幻方中的数字为π准确值相应的位数，例如“15”代

表π值从整数3开始数的第15位。右边方框中的数字为π准确值中相应于左边对应位置的数字，例如“9”代表左边幻方15位上的π值是9。

结果发现：右边方框中每行数字之和对应相等于每列数字之和。而左边幻方的各行、各列、各对角线的5个数之和都等于65。

9.7 “π痴”们如何编“π诗”

为了帮助记忆多位π值，人们发明了形形色色的方法。例如，利用韵律优美的诗歌，有趣的故事，顺口的口诀等。

古老的中国曾经流传着一首打油诗：山　一石一壶酒，二侣舞仙舞，罢酒去旧衫……它可以帮助记忆16位π值。

华罗庚用的“山巅一寺一壶酒，尔乐苦煞吾，把酒吃，酒杀尔，杀不死，乐尔乐”，就是背26位π值的口诀。这是昆山政协陈兆弘通过郭书春在2001年3月12日提供给本书的。

1997年，李文军编出可以记忆小数点后100位π值的口诀，它的开头是：山巅一寺一壶酒，尔留巫山雾……

“伞已撕，已无救而漏，吾伞无……”，这一口诀可帮助记忆前11位π值。

故事的例子是：(一个农民有一块）山（田)，一斗一石粈(米)，（养了）七（只）羊（和）四（匹）马；即“山，一斗一石粈七羊四马”。这句话里每个字的笔画数即为对应的π值，即3.141 592 653。

可以看出，中国人用字的谐音或笔画数代表对应数字。

当然，用诗记π并不是中国人的“专利”，所不同的是，

他们通常用字母的个数代表相应数字——字长记忆法。当然，最简单的字长记忆法的“诗”，可能就是“How I wish I could calculate pi.”（我好想算出圆周率）了。

1906年，美国欧尔（A.C.Orr）在《文摘》杂志上刊登了一首诗，只要把每个词换成它所含字母的个数，就能得到准确到30位小数的π值：

“Now I, even I, would, celebrate
3 1 4 1 5 9
In rhymes inapt, the great
2 6 5 3 5
Immortal Syracusan, rivaled nevermore,
8 9 7 9
Who in his wondrous lore,
3 2 3 8 4
Passed on before,
6 2 6
Left men his guidance
4 3 3 8
How to circles mensurate”.
3 2 7 9

现将这段诗试译如下：

现在，
我甚至要庆贺——用那伟大的诗句，
叙拉古那无与伦比的伟人（阿基米德）。
他有令人瞠目结舌的学识。
从古到今，
给来人指向导航，
怎样揭开圆的奥秘。

1914年，《科学美国人》增刊也载有一首帮助记忆π的诗：

"See, I have a rhyme assisting my feeble brain, its tasks of times resisting."

它可帮助记忆13位π值。诗的大意是：

我有一个顺口溜，
它能让我笨拙的头脑变得灵活，
并时刻发挥作用。

另外有三段分别帮助记忆8，15和21位π值的诗如下：

"May I have a large container of coffee?"

诗的大意是：我能要一大杯咖啡吗？

"How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics."

它的大意是：我要在一次重要的涉及技巧的讲演之后，举行一次酒会。

Sir, I bear a rhyme excelling
In mystic force and magic spelling
Celestial sprites elucidate
All my own striving can't relate.

其大意是：

先生，
我们要作一首优美的诗，
述说天上的妖魔用神秘的力量和符咒为所欲为。
而我所有的努力，
都无济于事。

在7.5中我们给出了π的前13个渐近分数，其中第6，9

两个分别是：

104 348/33 215 = 3.14 592 653…和 833 719/265 381 = 3.141 592 653 58…，以下诗句可帮助记忆这两个分数：

$$\frac{\text{calculator will get fair accuracy}}{\text{but not to } \pi \text{ exact}} \rightarrow \frac{104\ 348}{33\ 215}$$

$$\frac{\text{dividing top lot through (a nightmare)}}{\text{by number below, you approach } \pi} \rightarrow \frac{833\ 719}{265\ 381}$$

以上两段“分数诗”的大意分别是：

计算机能给出一个合理的准确度，
但却不是 π 的真值。
做一个周而复始地除以数的噩梦吧，
你将越来越接近准确 π 值。

学理科的大学生们也加入背 π 诗歌的创作。一首“校园歌曲”这样唱出了 16 位 π 值：“How I like a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics.”

把它翻译成中文是：

我要喝什么？
才上过一堂累人的量子力学，
当然要喝杯酒。

对于用字母的个数代表相应数字写“π 诗”的方法，美国缅因大学数学史家伊夫斯在《数学史概论》中提出了一个趣题：“为了记住 π 的十进位制的展开式，在课本上给出的最成功的帮助记忆的诗歌，能够给出 30 位准确的十进制数；但是不能编出产生超过 31 位准确值的帮助记忆的诗歌。为什么?”这里的 30 位、31 位均指“小数点后”。

下面给出一个可能不符合伊夫斯心愿的答案。因为第32位值是0，所以如果能编出超过31位的外文记忆诗句，那么在32位处的字母数应是0个；这显然是不可能的。而如像前用“calculator表示‘10’”那样用一个单词表示两个数字也不可能，因为32位的前一位是5，要表示“50”则要用有50个字母的一个单词，而这是没有的；虽然最长的英文单词有1909个字母——它指的是一段DNA。

正因为如此，没有其他附加条件又能帮助记忆的π值诗句均不超过31位。例如，德恩汉姆·拉勒特（Denham Larrett）1926年在纽约出版的《数学的故事》（The Story of Mathematics）中，有一个帮助记31位小数π值的句子。

而一首背31位小数π值的诗是这样的：

Sir, I bear a rhyme excelling
In mystic force and magic spelling
Celestial sprites elucidate
All my own striving can't relate.
Or locate they who can cogitate
And so finally terminate. Finis.

它的中文大意是：

各位，我作了一首绝妙好诗，
它和魔咒一样，具有不可思议的力量。
就像出自神仙的手笔，说的净是玄之又玄的道理。
就请各位屈指一算，
这就是我的诗。

可是，没有什么能难倒痴迷π的、“死不认输”的“诗人们”——他们自有妙计高招。有的用10个字母的词表示0，

例如下面要看到的契斯（Mike Keith）的诗《馅饼，E：仿〈乌鸦〉》，就是如此。有的用标点符号表示0。例如下面要提到的契斯的《一个自我指涉的故事》就是这样。又如，有的人用不包括句号的标点符号表示数字0：例如，Value:pi 中的“:”表示数字0。

契斯的记忆暗含740位π有效数字的诗（网站www.Joyofpi.com有全文），体裁和艾伦坡的《乌鸦》诗如出一辙。下面只节录包含80位π有效数字的这部分，其中含有10个字母的词代表0，超过10个字母的词代表两个数字——例如有12个字母的词代表12，标点符号不算。

Pie, E..: Neara Raven

Midnights so dreary, tired and weary.

Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.

During my rather long nap—the weirdest tap!

An ominous vibrating sound disturbing my chamber's antedoor.

"This," I whispered quietly, "I ignore."

Perfectly, the intellect remembers: the ghostly fires, a glittering ember.

Inflamed by lightning's outbursts, windows cast penumbras upon this floor.

Sorrowful, as one mistreated, unhappy thoughts I heeded:

That inimitable lesson in elegance-Lenore-

Is delighting, exciting ... nevermore.

翻译成中文是：

馅饼，E：仿《乌鸦》

深沉可怕的午夜。
我静静地阅读一些古老的传说。
我正在打瞌睡时，突然听到急促的敲门声。
前厅大门传来一阵不祥的敲门声。
我小声地说："不管他了。"
还记得很清楚：余烬上的火光忽明忽灭。
一道闪电将窗影映在门上。
一想到美丽的乐诺尔，
我就不禁悲从中来，
这么可爱的美人，已经不在人间了。

9.8 "老外"赋"π诗"万紫千红

不仅是美国人编了许多"π诗"，世界各国的"π诗迷"也"八仙过海"编"π诗"。例如，一首能帮助记30位小数π值的法国诗歌，就可以在以下书中找到：爱德华·康顿（Edward Condon）于1925年在堪萨斯州出版的《数学珍宝》(Curiosities of Mathematics) 19页，里克斯（H.E.Licks）于1931年在纽约出版的《数学游戏》(Recreations in Mathematics) 50页，梅里尔（Helen A.Merrill）于1934年在波士顿出版的《数学游览》89页。

这些"π诗"不但数量多如牛毛，难以卒述；而且"色彩"万紫千红，争奇斗艳。

在《数学史概论》（山西经济出版社，1986年出版）一书的102页，说有一首法文诗能给出前27位π值：

Que j'aime à faire apprendre

Un nombre utile aux sages

Immortel Archimède **artiste** ingénieur

Qui de ton jugement peut **priset** la valeur

Pour moi ton problème

A les pareils avantages!

试译为：

我欣喜地使哲人，

记住一个有用的数。

不朽的阿基米德——艺术家和工程师，

他能赏识你真知灼见的价值。

对我而言，

你的难题同样引人入胜。

遗憾的是，其中的"**A**"，"**les**"只能代表"**1**"和"**3**"，而不能代表应有的"**3**"和"**2**"。

大致相同的另一首法文诗是：

Que j'aime à faire apprendre **ce** nombre utile aux sages!

Immortel Archimède **antique**, ingénieur,

Qui de ton jugement peut **sonder** la valeur?

Pour moi ton problème **eut de** pareils avantages.

中文可译为：

真想让阿基米德看看这个数值，

这位不朽的智者、艺术家和工程师。

你看出它是什么了吗？

它就是你研究很久的问题。

这两首诗相比，有 5 处不同（用黑体区别），后一首还多

了4个标点符号。

而兰兹（David Lantz）写的下列优美的西班牙语诗能帮助记忆前11位π值：

Sol y Luna y Mundo Proclaman al Eterne Autor del Cosmo.

中译文有两种版本：

(1) 日、月、宇宙齐声赞扬造物主。

(2) 太阳、月亮、地球——宇宙永恒的主宰。

但《数学史概论》的103页，把上面的Cosmo写为Cosmos——由于这一位π值应是5而不是6，可以理解成是误写。

一首希腊语诗是这样的：

Αετ ο θεοζ ο Μεγαζ γεωτρε ι
Υο κυκλου μηκοζ ιυα ορισῃ διαμειρω
Παρηγαγεν αριθμον απεανιον
και ον φεν ουδεποιε ολον
θνητοι θα ευρωδι.

它是哈齐达基斯（Niko laos Hatzidakis）写的。中文大意是：

造物主就是用几何学
定义圆周和直径的比率，
它是一串没有尽头的数字。
这串数字到底有多长？
大概只有天知道。

费兰提（Isidoro Ferrante）写的一首意大利语诗如下：

Che n'ebbe d'utile Archimede da ustori vetri sua somma scoperta?

翻译成中文是：阿基米德发明了聚光镜，但这对他又有什么用？

诗中“聚光镜”的背景是：传说阿基米德用能聚集阳光的玻璃镜，烧毁来犯的罗马战船。但最后罗马人还是攻陷了希腊西那库斯城，杀死了阿基米德。

荷兰语的一首诗是：Eva o lief，o zoete hartedief uw blauwe oogen zyn wreed bedrogen.

中文意为：亲爱的夏娃，你湛蓝的双眼真叫人意乱情迷。

这是奈美根大学（University of Nijmegen）数学系和物理系的一首流行歌曲。

威克斯特罗姆（Frank Wikström）翻译的瑞典诗是：

Ack，o fasa，pπ numer förringas
ty skolan låter var adept itvingas
räknelära medelst räknedosa
och så ges tilltron till tabell en
dyster kosa.
Nej，låt istället dem nu tokpoem
bibringas!

中文大意是：

天啊，π愈来愈不受重视了，
现代学生学习几何学时只会用计算机，
连九九乘法表都不会背了。
既然如此，还不如念诗算了。

有人发现用日语背圆周率就简单多了：san ichi yon ichi go ku ni roku go san hachi。其中某些数字的组合恰好等于其他日本字。例如，ichigo 是“草莓”，kuni 是“国家”。将部分数字

转换成日本字，就成了一段易记的文字："3.14 草莓国的清晨六点，五根筷子……"当然，也有一些牵强的成分，例如"筷子"的日文是 hashi，和日文的"八"（hachi）不同。

但是，上述诗歌的文采都无法和诗歌《π》相比。它是 1996 年诺贝尔文学奖得主、波兰诗人维斯瓦娃·申博尔斯卡（1923～　　）写的，赞美 π 坚定不移地向着无限延伸。

9.9 π与"圆方病患者"

"圆方病患者"（morbus cyclometricus），是伊夫斯在《数学史概论》94 页借用德·摩尔根的词，对 π 迷们的戏称。他们是"数学狂怪"们的一个"分支"。

伊夫斯写道，患者们提供了大量有趣的文献，有时令人简直难以置信，要把他们的许多想法和做法全写出来，得单独出一本书。为了说明这点，这里举出一个例子：有一位患者于 1892 年在《纽约论坛》上，宣布重新发现了一个长期被丢失的秘密，该秘密导出 3.2 为 π 的准确值。随着这一宣布而引起过热烈的讨论，使许多人赞成使用这个 π 值。"再则，自 1931 年作出这项宣布后，这位热心的作者为了证明 $\pi = 3 + 13/81$，搞了一大厚本抄件，散发给全美国的大多数学院和公共图书馆。"就像 5.2 的 2.（22）里的海塞尔那样。

伊夫斯还把将要在 12.3 中说的那位"$\pi = 3.2$ 法案"的提出者古德曼也视为患者。按这标准，企图法定 π 为 3（见 5.1 的 2.）或 3.2（见 12.3）的议员们也应进入患者的行列。

π 确实迷人，而使不少人成为圆方病患者！然而，π 这本"书"就是他们写成的。

9.10 愚蠢的巴霍姆和精明的狄多女王

大名鼎鼎的俄国作家列夫·托尔斯泰（1828～1910），在远没有《战争与和平》那样著名的小说《一个人需要多少土地》中，写了一个叫巴霍姆的人买土地的故事，片断如下。

“那么，什么价呢?”巴霍姆问。

“我们的价是统一的：每天1000卢布。”

巴霍姆没听懂。“每天？这是什么样的一个单位呀？一天等于多少俄顷?”俄顷又译为俄亩，1俄顷合10 925.4米^2。

“我们，是不会计算这些的，”那人说，“我们只是论‘天’出卖；你一天之内走出多少地方，那些地方就是你的了，价钱呢，就是1000卢布。”

巴霍姆奇怪极了。“可是，”巴霍姆说，“一天之内是可以走出很大一块地来的呀!”

那个酋长笑了。“那就全是你的，”他说，“只有一样：你若是在白天赶不及回到你出发的地点，你的钱就算白花了”……

这几个巴什基尔人分手了，大家约好明天天不亮就在这儿会齐，等旭日东升就出发。

结果，巴霍姆从A出发走出图9-4示路线围成的地，但由于他拼命地走，以致“嘴里流出血来，已经死在那里了……”

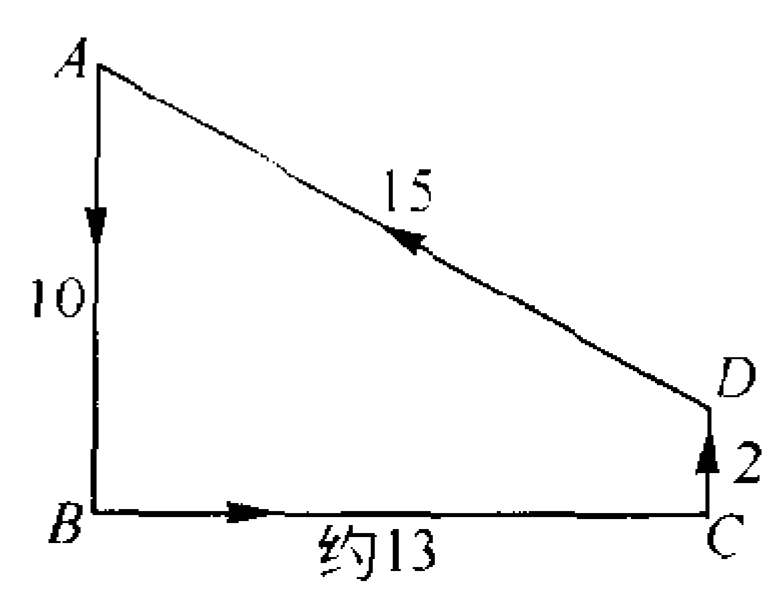


图 9-4

可以看出，由于巴霍姆想买到尽可能多的地，在第一、二

阶段——就是 AB，BC 走得太远，以致最后走出一个梯形——面积约 78 平方俄里。1 俄里约合 1.066 8 公里。

他用 1000 卢布买了 78 平方俄里的地，留给他的儿子。他的墓碑上刻有他的名字，而托尔斯泰则不无讽刺地在名字旁写了一行字："这位农民的墓穴宽三俄尺，长六俄尺。" 1 俄尺合 0.7112 米。

巴霍姆累死那天共走了 40 俄里，围成梯形。但他的初衷是想走出一个正方形。如果真是这样，那这块地的面积将是 100 平方俄里，比他的梯形约大 28%。

那么，问题出来了。走 40 俄里，走出什么样的地面积最大？

答案众所周知，这块地应是圆形。这是因为在所有等周的图形中，圆的面积最大；或者说，在所有等面积的图形中，圆的周长最小。顺便指出，在所有等表面积的物体中，球的体积最大；或者说，在所有等体积的物体中，球的表面积最小。

那么，圆周长 40 的圆面积是多少呢？是 127，比 78 约大 63%，比 100 约大 27%。由此可见，如果巴霍姆懂数学的话，他可以为儿子多买到 63% 的土地。或者说，如果他只想买到 78 的地，就只需走 31.3 长的圆周，也不致走 40 而累死了。

但是，威尔吉的罗马史诗中的狄多女王就更聪明了。

狄多女王是罗马皇帝泰雅王的女儿，也是公元前 800 年地中海东岸的腓尼基国国王—— 一个暴君的妹妹。在她的哥哥谋杀了她的丈夫之后，便携随从悄悄从海上逃往非洲突尼斯。在那里，她向当地部落的酋长——土著的雅布王送上珍

贵的珠宝等物之后，乞求在海边给她一些土地，使她有安身之处。

雅布王问她要多少土地。她说只要一张犍牛皮所能围起来的地方。由于这看起来似乎是一个微不足道的要求，所以雅布王便答应了她的乞求："牛皮送给你，用它围住的土地就是你的领地。"

精明的狄多女王小心地把雅布王给她的犍牛皮切成许多细细的小条，结成一条长绳，并用它们在海边围成了一个半圆——这些小条所能围成的最大面积。在这块半圆形的土地上，她建立了拜萨（意为牛皮）城。后来，它发展为闻名遐迩的迦太基国，她成了首任女王……

我们不知道雅布王给她的犍牛皮有多大，也不知道她切得多细，海岸线是什么形状。但是，如果假设犍牛皮长 2 米，宽 1 米，她切成宽 1 毫米的小条，相连部分的长度忽略，海岸线是直线；那么，就不难算出这块半圆形的地约 0.637 平方公里——足够她和她的随从安身了。

9.11 游览巴黎不妨光顾"π 厅"

在巴黎罗斯福大街的绿化区内，矗立着一座三层的宫殿式建筑，这就是举世闻名的法国青少年科技宫——发现宫(Palais de la Découverte)，又名巴黎科学馆。

图 9-5 所示的发现宫是一座综合性科技博物馆，1935 年由法国物理学家让·贝伦倡导修建。布雷特（Jean Brette）多年一直是发现宫的数学方面的负责人。除星期一休息外，每天免费向青少年开放。青少年可通过馆内各种设备了解人类

科技发展的过去、现在和将来，也可在教师指导下从事研究、实验。

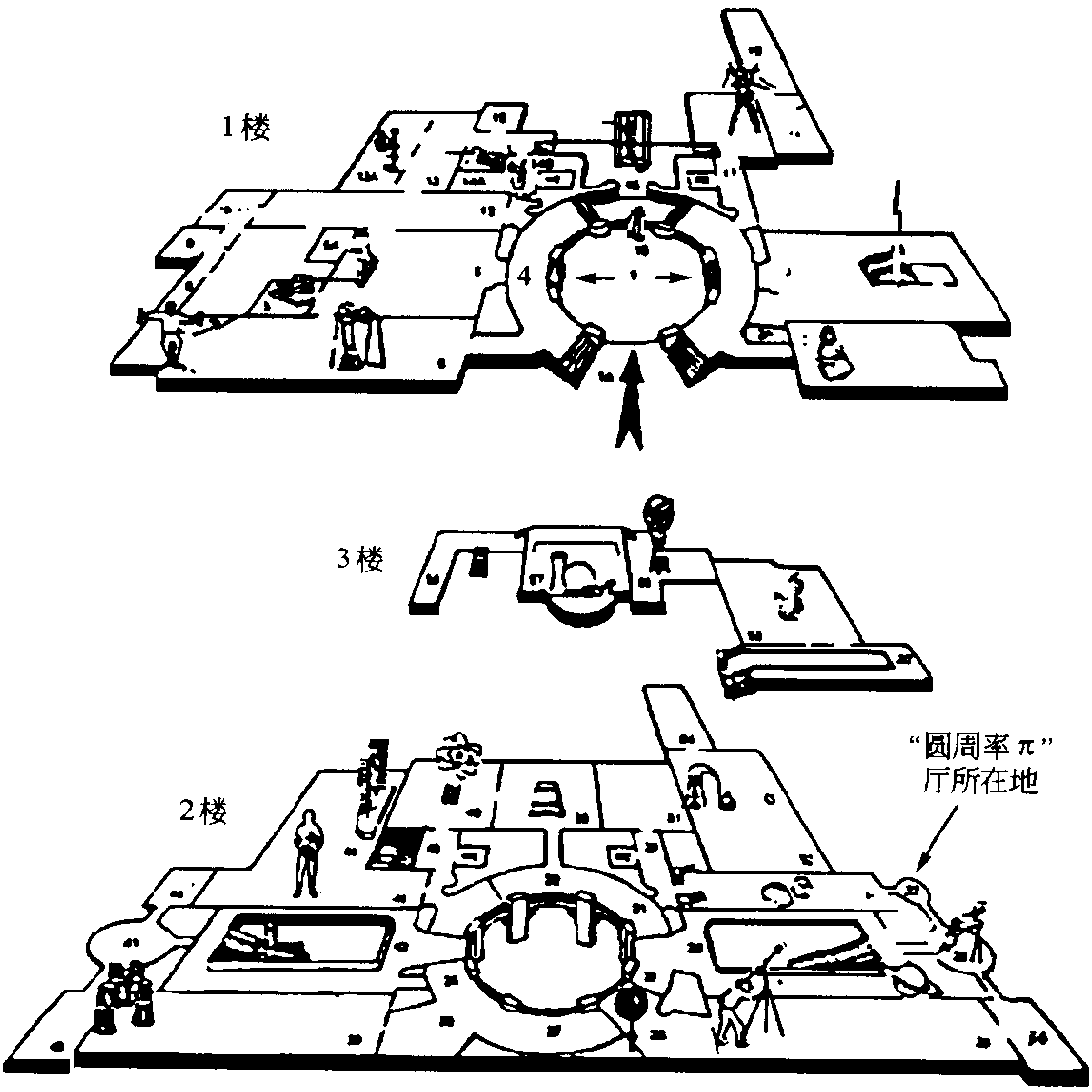


图 9-5　法国青少年科技宫——发现宫

在二、三层的展厅，设有“数学的历史”（21 厅）、“信息（计算机）”（22～50 厅）、“数学”（30，31 厅），但π“至尊至贵”的地位赢得了设计者们的青睐，将它从数学中分离出来，单独开辟为 32 厅——“圆周率π”厅。读者如果到巴黎，不妨去那里一睹π的风采。

9.12 谜语、游戏和 π

一则谜语说：细细两条腿，帽儿头上戴，不当圆规使，算圆离不开。其谜底便是大名鼎鼎的 π。

π 的一个游戏是，将图 9-6 所示用火柴棍组成的等式，移动一根改成另一个近似等式。答案见图 9-7，这里 22/7 = π 成了一个游戏趣题。

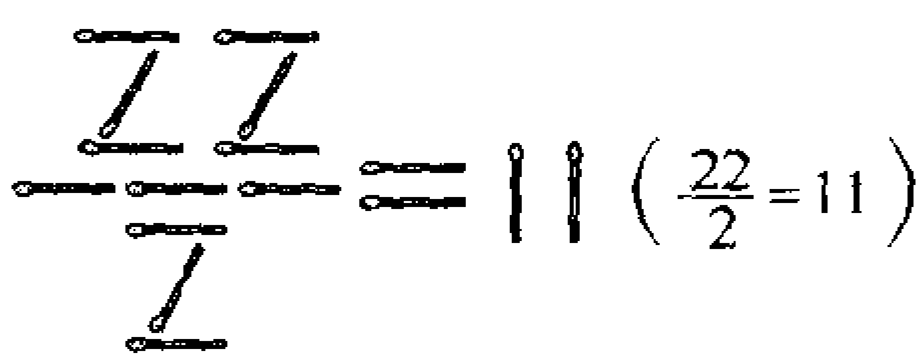


图 9-6

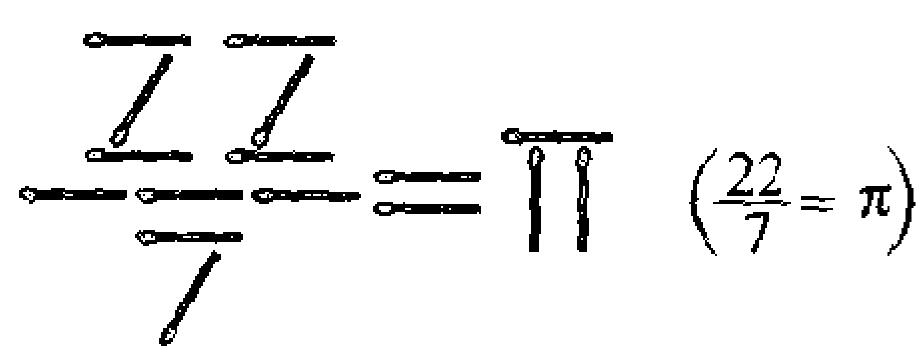


图 9-7

π 的第二个游戏是，要用直径为 1 的小圆去完全盖住半径为 1 的大圆，问至少要多少个小圆？答案是如图 9-8 所示的 7 个。

“方中排圆”的游戏趣题是，在边长为 10 的正方形中，最多能排下多少个互不相交的直径为 1 的圆？如像图 9-9 那样“整齐”排，则只能排 100 个，因为此时有如图 9-10 所示较大的空隙。而如图 9-11 那样排，虽然有如图 9-12 那样较小的空隙，但上部却出现一窄长条空隙，所以仅仅能排 105 个。正确的答案应如图 9-13 排出的 107 个。

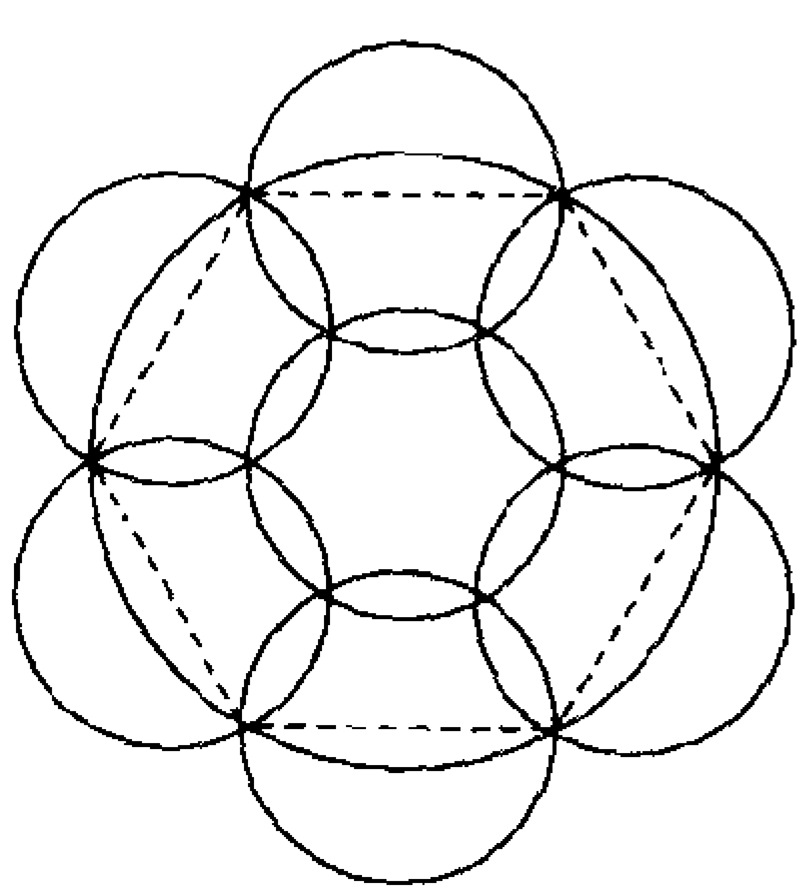


图 9-8

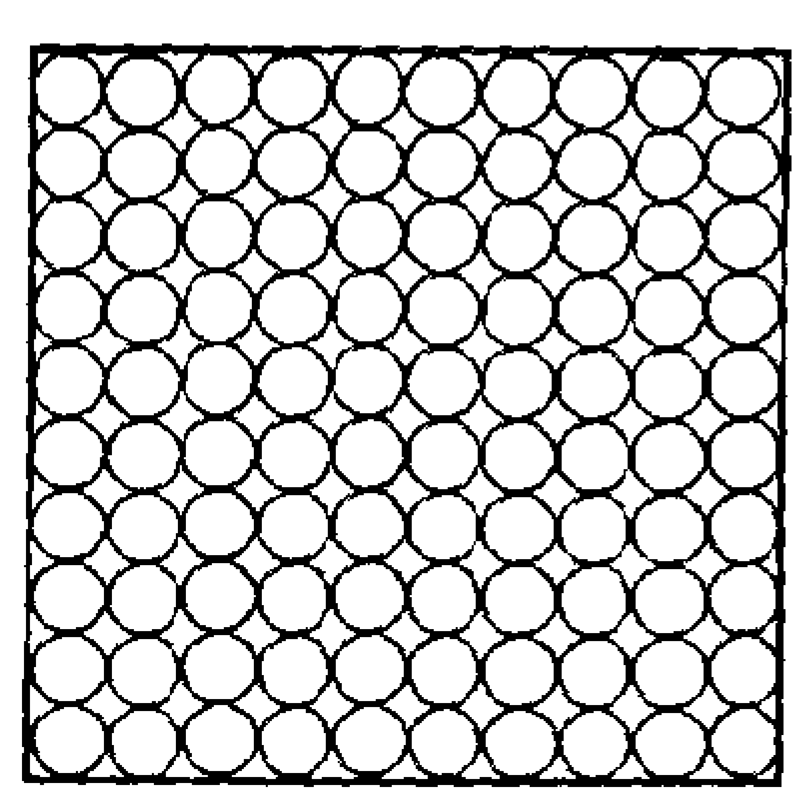
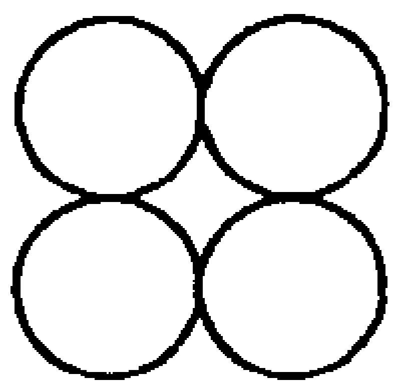
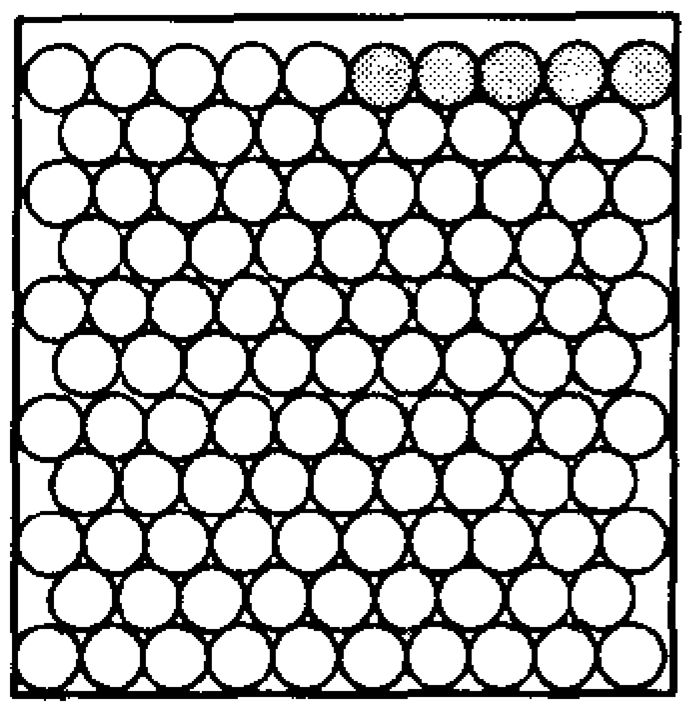
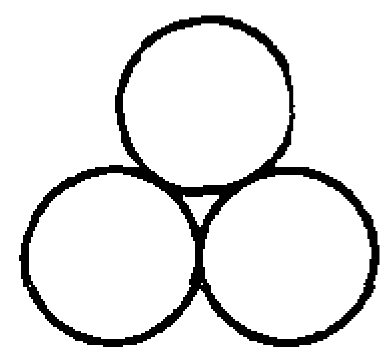
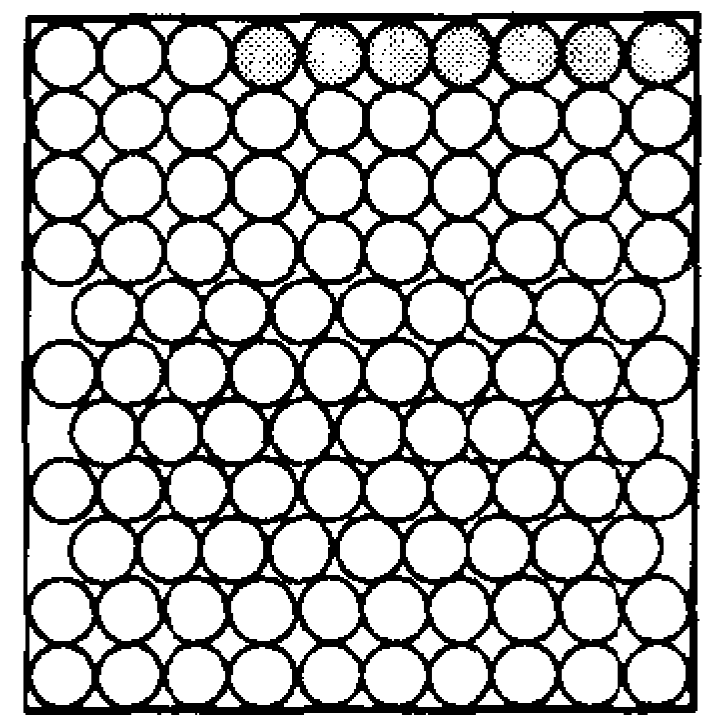


图 9-9


图 9-10


图 9-11


图 9-12


图 9-13

将上题中的“正方形”改为“正方体容器”，将“圆”改成“球”，那这个容器最多能装多少个小球？这就是球装（sphere packing）问题。

第三个游戏是“凑 π”。

用 0～9 这 10 个整数组成一个分数，分子分母各 5 个，要求不重复也不遗漏，凑成尽可能接近准确 π 值。你能想出多少种方法？

下面是其中 8 种：

76 591/24 380 = 3.141 55…

95 761/30 482 = 3.141 55…

39 480/12 567 = 3.141 56…

97 468/31 025 = 3.141 59…

37 869/12 054 = 3.141 61…

95 147/30 286 = 3.141 61…

49 270/15 683 = 3.141 61…

83 159/26 470 = 3.141 63…

最后一个游戏是“用 π 取整凑数”。

我们知道，数学上用 [n] 表示取 n 的整数部分，例如 [3.18] = 3。

那么，用若干个π，仅仅通过若干次加、减、乘、除、乘方、开方之后取整，而不用其他任何数学符号，你能不能得到指定的任何整数呢？例如，用3个π能不能得到17，18，19，20呢？

下面，各给出一种答案：

$17 = [\pi \cdot \pi \cdot \sqrt{\pi}]$，$18 = [\pi] \cdot [\pi + \pi]$，

$19 = [\pi(\pi + \pi)]$，$20 = [\pi^{\pi}/\sqrt{\pi}]$。

9.13 π与50，144，360“天作地合”

《中国圆周率略史》419页说，中国古书《九术通考》上记载，边长为7的正方形，周长为28；而它的内接圆周长用约率算，是22。这28与22相加得50，是“大衍之数，合方圆同径两周数也”。还说，这大衍之数也是勾股的原本。当勾3股4弦5时，勾方9加股方16再加弦方25也是50!

《中国圆周率略史》还说，《周髀》方圆之言，竟与祖冲之的约率有这样隐约的关系，则是一件有趣味的事。当然，这也仅仅是一种巧合，我们不应将它涂上迷信的色彩。

此外，π的前144位数加起来等于666，而$144 = (6+6) \cdot (6+6)$。这又是一个巧合。

圆有360°，那我们就来看看π的前360个数吧。这又是一项惊人的发现：从第359个数开始，出现了数字360。也就是说第360个数“6”正好位于360的中央！这记载于泽格（Monte Zerger）在1979年出版的《圆周率的玄机》中。

9.14 π的“对称”这般神奇

最有趣的、最神奇惊人的发现是：π前33位值中魔术般的“对称”！

我们用两根竖杠“|”将前33位π值作如下划分，并用折线连接相关数字：

3.141 592 653 589 | 793 238 462 643 383 279 | 50

在32位小数中，有两个26，若以第二个26为中心，有79，32，38这三对数，“轴对称”地列于它的两侧。这是对称（1）。

前一个26的前5个数14 159，和后5个数53 589各个数字之和为50；而且，这10个数正好是第一根竖杠前的10个。这个50，恰好是第二根竖杠后的数。这是对称（2）。

后一个26的前、后的46与43之和是89，这恰好是第一个竖杠前的数。这是对称（3）。

前述三对数79，32，38中间的数32，正好是79，32，38各个数字之和。这是对称（4）。

虽然以上有的对称比较牵强，但却十分有趣迷人。能作出上述发现的当然不是等闲之辈，他能从几百年人们熟视无睹的前33位π值中发现这么奇妙的规律！

这个人就是美国《科学美国人》“数学游戏”专栏作家马丁·加德纳。在该科普杂志1965年1月号上，他发表了谈上述对称的趣文。

那么，加德纳为什么要研究π的32位小数，并将它与26

联系在一起呢？据说是因为很多自然现象与32和26这两个数字有关。例如，人有32颗牙齿，水晶共32类，水在32℉(32华氏度）结冰，地球的重力加速度约32英尺/秒^2，原子第四轨道上最多容纳32个电子，基本粒子中有32种长寿命粒子，等等。而群论的有限单群中散在单群的总数则是26——当时这仅仅是尚未证实的猜想。但加德纳却有“未卜先知”的“火眼金睛”——后来，人们果然在1983年证实了散在单群的总数确是26。英文字母的总数也正好是26个。当然，这仅仅是一些有趣的巧合。不过，我们也可以看到他大量的投入和非凡的慧眼。

加德纳以其大量的篇章，无比地丰富了数学的内容，把数学这门许多人看来枯燥乏味的科学，变成了生动有趣的“艺术”，从而吸引了大批青年投身数学。对此，有人认为，“在数学的这座金碧辉煌、神圣庄严毫不亚于奥林匹斯的数学圣庙中，供奉着欧几里得、牛顿、欧拉、伽罗瓦等大神，无疑他也会叨陪末座”，将他誉为“人类心智的保护神”。

9.15 π也是“天地英雄”

打开地图册，许多蜿蜒曲折的江河映入眼帘，奔向浩瀚的大海……

不知道你研究过河流的实际长度与“直线长度”的关系没有？这里，直线长度是指河的源头到入海口或入湖口之间的“直线”距离——过这两点之间的大圆弧线的长。英国剑桥大学的地球科学家汉斯教授经过研究，惊讶地发现：江河的实际长度与直线长度的比值，很接近π值，尤其是在平原上疏松泥

土里流淌的河流。

那么，这一结论有没有科学解释呢？爱因斯坦经过研究、分析后，首先对此作了科学的解释。江河有一种走出尽可能多的环形路径的倾向，这是因为最细微的弯曲将会使外侧的水流加快，从而造成对外侧河岸更大的侵蚀和更急的转弯，这一过程的正反馈将导致河流更加曲折，而渐增的转弯最终会使河流绕回原处而“短路”；同时，河流将变得较为平直，形成一个“U”形湖。这两种趋势的平衡导致比值π的出现。

大自然就这样将π值由蜿蜒、曲折的江河生动地书写在大地之上！

当然，由于山区岩石比平原泥土较硬，上述外侧侵蚀冲刷将受到限制，于是弯曲程度也不会那么厉害。所以流经山区的江河的上述比值，会比π小。

而英国苏萨克斯大学天文学教授约翰·巴罗（John Barrow），则把他的“弦有效宇宙”理论著作起名为《空中的π》——当然这仅仅表示一个天文学家对π的关注而已。

1995年4月，英国《自然》杂志则刊登文章，介绍英国伯明翰市阿斯顿大学计算机科学与应用数学系的罗伯特·马修斯，如何从最亮的星星中随意选取一对又一对进行分析，计算它们位置之间的角距。他检查了100万对因子，据此求得π值约为3.127 72。

看来，π的确成了一个“天地英雄”！

9.16 π和爱公生日同庆

“哈！哈！哈！”2004年3月14日15点9分，武汉大学工

学部体育馆欢声笑语不断……

是什么活动要选在这个不是“整点”的时刻开始？该校数十名学生为什么在这里欢聚一堂？

啊，明白了！314 159——圆周率的“生日”嘛！

武汉大学科幻协会和数学建模协会的大学生把3月14日定为“圆周率节”，选定15点9分开始庆祝，来展示生活中π的魅力（图9-14）。

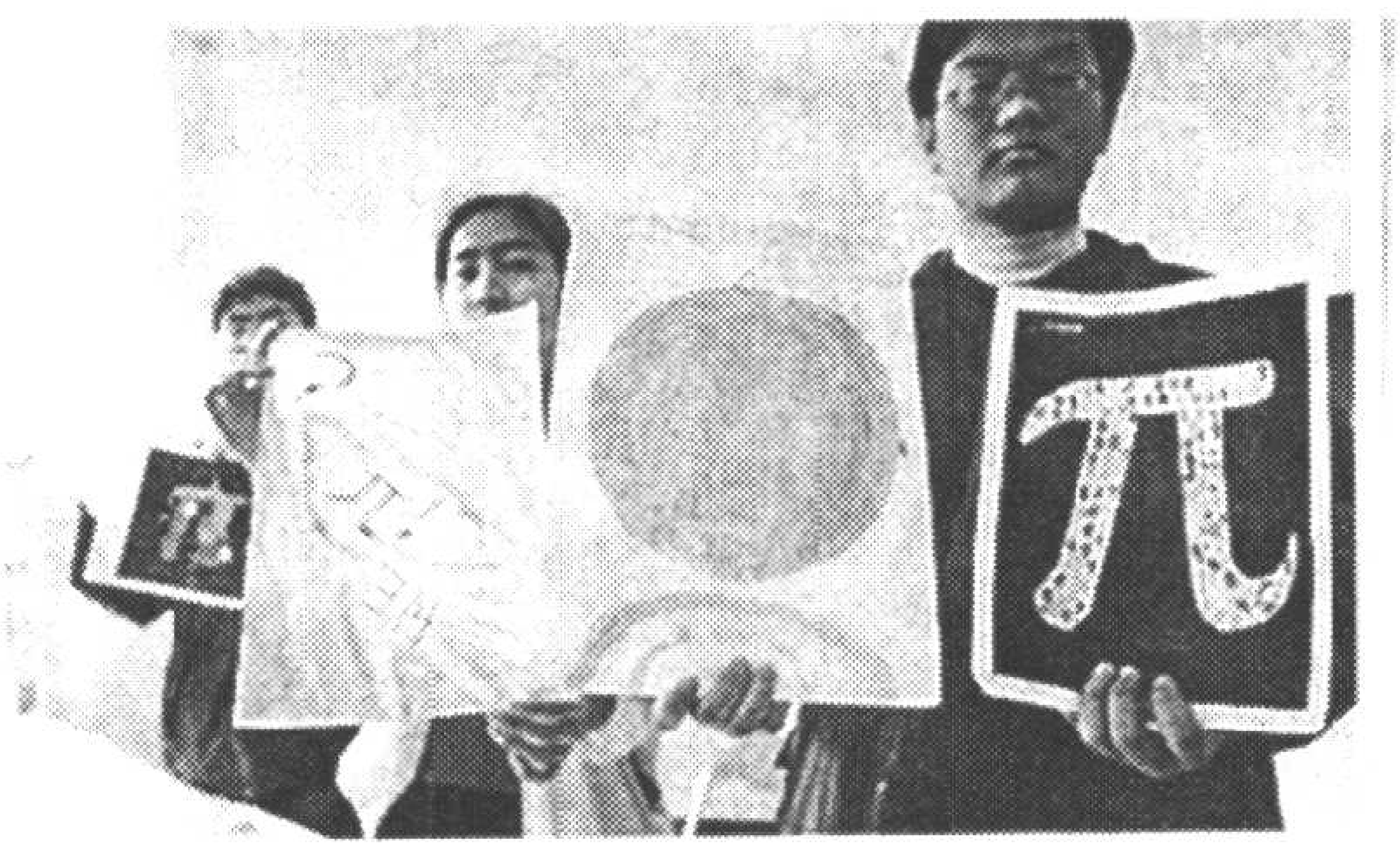


图9-14 圆周率的节日

大伙儿收集了大量与π有关的图片、音乐、电影等资料，有π型包装的某知名香水，有以“3.141 59…”为乐谱的交响乐，还有π型手表、衣服等……不少学生还创作了以π为内容的绘画作品，大学生王毓乾现场演示了古代数学家刘徽如何利用割圆术计算出π值。

该活动的组织者陈志文说：“我们打算向有关部门申请，让‘圆周率节’名正言顺，号召全省甚至全国的大中小学生都来关注这个节日，关注身边的数学和科技。”

当然，把3月14日定为“圆周率节”，武大的学生还不能

获得创新“专利”——莫道君行早，更有早行人。

每年3月14日，是美国旧金山市的“π的节日”。下午1点59分，热闹的人群要围着当地的博物馆绕行3.14圈——他们就这样表示3.141 59。同时，人们嘴里还吃着各种各样的饼子，因为饼（Pie）在英语里与π同音。看来，π在这里与人们同欢共乐了。

在美国麻省理工学院，每年秋季都要举行一次足球比赛。足球迷们不但要为自己喜爱的球队加油，还要大声呼喊自己最喜爱的数字：3.141 59。

人们就这样以各种不同的方式来庆祝“π的节日”。

有趣的巧合是，3月14日（1879年）还是爱因斯坦的生日，那就让π迷们同时庆祝吧！

9.17 π英雄击败“魔鬼机器”

数学为科普作家的写作提供了丰富的思想，诸如第四维、梅比乌斯带、超空间、克莱因瓶、π等等都是写作的题材。

在《星际旅行——下一代》（又译《星际迷航记》——Stal Trek）的一个情节“引狼入室”里，数学是英雄。这里，π被用来击败“魔鬼计算机”。当斯波克要这台电子计算机“完整地算出π来”的时候，由于π是无限不循环小数，迫使计算机全神贯注地进行永无休止的计算，从而打败了邪恶的魔鬼电脑，为船员们赢得了宝贵的修复飞船的时间。

当然，以π为写作题材并不限于科普作品。在一部叫《π》的影片里，就有一位数学天才因为在股市里苦心寻找数字的规律而发疯。还有一部叫《网路上身》（The Wed）的电影，也

有珊卓·布拉克（Sandra Bbllock）利用符号 π，侵入他人资料库的情节。1966 年英国人西区考克（Alfred Hitchcock）的影片《突破铁幕》（Torn Curtain）中，一个德意志民主共和国的间谍组织的名字就是“圆周率”。

毋庸置疑，其他的作家也能在他们的创作中更多地运用数学——包括 π!

9.18 $e^{\pi\sqrt{163}}$ = 262 537 412 640 768 744 吗

三个无理数——e，π，$\sqrt{163}$“能够”联合形成一个整数，这似乎太令人惊异了！事实上，印度神奇的数学家拉马努金（图 9-15）就首先推测，$e^{\pi\sqrt{163}}$是一个整数——他发现这个数的值为262 537 412 640 768 743.999 999 …。由于后面几位都是 9，因而可能会是一个整数。

事实果真如此吗？半个世纪过去了，没有人能得出正确答案。



图 9-15　拉马努金

1972 年，人们用电子计算机计算，居然得到小数后直到 200 万位都是 9 的结果。但是，它要是一个整数，人们必须证明 9 应该“无限循环”。最后，美国亚利桑那大学的约翰·布里洛“证明了”这个数等于 262 537 412 640 768 744。他真的证明了吗？

事实上，这个数并不是一个整数。这个位数很多的近似值只是愚人节——每年 4 月 1 日的一种数学玩笑，刊在 1975 年 4 月出

版的《科学美国人》上。它的作者，就是大名鼎鼎的《科学美国人》的"数学游戏"专栏编辑——美国数学家马丁·加德纳。

9.19 法庭上侃π相去天渊

加利福尼亚州州政府控告了涉案的O.J. 辛普森。

1995年7月26日。在法庭上，被告律师布莱泽（Robrt Blasler）和联邦调查局特派探员马兹（Roger Martz）有一段如下对话。这段对话摘录自O.J. 辛普森的案卷中。

问：假设某圆的直径为5mm，你能算出它的面积吗?

答：可以。但多少有些误差。

问：你知道求圆面积的公式吗?

答：πR^2。

问：π是多少?

答：真难倒我了。好像是2.12，又像是2.17。

伊东法官：是3.1214吧?

问：你身为科学家，应该不会忘了π的值吧?

答：我从高中毕业后，就没用过π了。

问：就当是3.12吧。

……

9.20 "外星人"看π与"众"不同

"外星人"至今还没有被发现，所以只存在于科幻小说之中。美国著名科普作家卡尔·萨根（1934～1996）的小说《接触未来》中，不但有"外星人"，还有一段"我们"和"外星

人”关于 π 的对话。

“你们的数学家花了好大的工夫，才算出有 100 亿个小数位的圆周率。如果我告诉你，其他生物已经算出更多的位数，你应该不会太惊讶吧。假设圆周率在第 10^{20} 个小数位之后，只有一连串的 1010…”

“只有 1 和 0？那它应该有素因数吧？”

“对，有 11 个”。

“你是说在圆周率中，暗藏着一个 11 维空间的信息？宇宙中有数学传递信息的生物？怎么可能将信息藏在圆周率里？它应该是宇宙中不变的常数啊！”

“没错。”

……

9.21 阿公的“准确值”不如“近似值”

大约在 530 年，印度数学大师阿耶波多利用圆的正 384 边形的周长，算出了 π 的值约为 $\sqrt{9.8684}$。可以算得这个值约为 3.1414。

后来，他在以二十三段二行诗组成的《甘尼踏》(Ganita) 一书中，提到了这个用平方根表示的 π 值。他在第四段二行诗中写道：“假设某圆的直径是 20 000，那么圆周长的近似值就是 62 000 + (4 + 100)·8。”可以看出，这里他得到 $\pi = 62\,832/20\,000 = 3.1416$。

看来，阿公的“准确值”3.141 倒反而比“近似值”3.141 更偏离准确 π 值。可见，到了 6 世纪，他对准确 π 值的认识依然云遮雾障，“不见曦月”。

9.22 圆和球，两张天下最美的脸

1. 杨振宁的“圆形轨迹”

2004年8月1日下午，北京电视台1套节目播放了杨振宁于7月17日在北京大学做的报告。杨振宁跟1000多位北大、清华的学生说，2003年10月19日他的夫人杜致礼“先走一步”之后，年底他就回到了“起点”中国，居住在当初生活过的清华园内。

对于自己的“叶落归根”，杨振宁还动情地说，20世纪的伟大诗人艾略特在他的《四个四重奏》的诗中说，我们从起点走到终点，结果又回到了起点。杨振宁还展示了类似图9-16的图形，来形象地加以说明。图9-16和图9-17，都原载于1970年在纽约出版的《圆的发现》一书，书的作者是美国数学家穆拉里（Bruno Murari）。

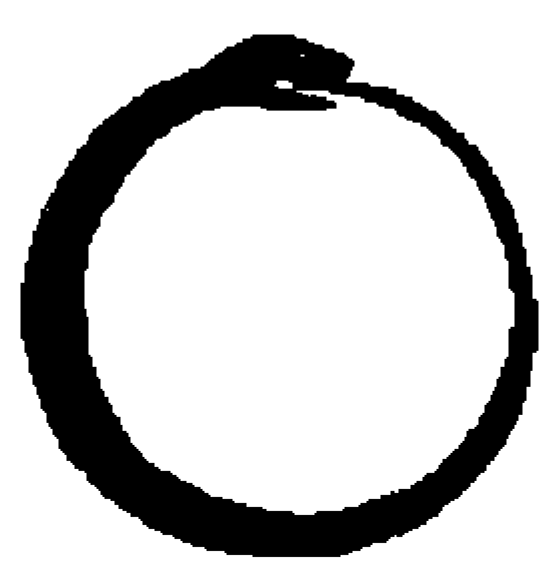


图9-16　作为永恒象征的咬自己尾巴的蛇

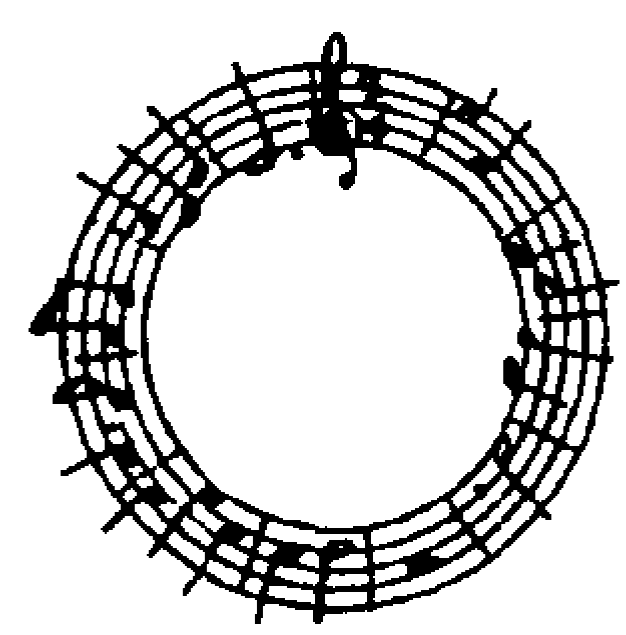


图9-17　表示一个发音物体的无始无终的乐谱

杨振宁提到的艾略特（Thomas Stearns Eliot，1888～1965），是出生在美国密苏里州路易斯的英国诗人。他在1944年写下的《四个四重奏》，是他自己的登峰造极之作。

其实，不单是杨振宁喜欢圆，可以说人类对圆（和球）都“情有独钟”。原因很简单，它们是最简单而又最美丽的一对“玉女金童”。

可不是吗？连音乐都要像图 9-17 那样画上圆圈哩！

2．“金童玉女”与您相伴

美国著名学者哈特在《历史上最有影响的 100 人》一书的序中说：“发明轮子的那个人——假定轮子确实是由一个人发明的话——是一个非常有影响的人物，也许比列入本书的大多数人物还重要得多。”

哈特的话不无道理。在现代社会，轮子的芳踪倩影随处可见，重要性无可替代——例如美国就因为汽车多如牛毛，被称为“轮子上的国家”。

毋庸置疑，轮子就是圆这个“玉女”在第一次“整容”之后的“人造美女”。

其实，圆和球这对“玉女金童”的倩影随处可见：从旭日夕阳，到东升玉兔；从露珠雨点，到飞天彩虹；从“一石击破水中天”后的同心圆水波，到许多瓜果的粗略形态；从漂浮在水面上的油滴，到猎枪用的铁质霰弹；从体育比赛的许多球类，到人体的眼球头颅；从浩瀚宇宙中璀璨群星的大致形状，到它们漫长而似圆的椭圆轨道……

当然，“金无足赤，人无完人”，圆和球也是这样。这正如 1982 年菲尔兹奖得主、美籍华裔数学家丘成桐（1949～　）所说：“完美的圆和正方形在自然界中是没有的。”如果您也爱恋圆（或球），可要有这种心理准备啊！

3. “天设地造”“金童玉女”

那么，是谁造就了这对“金童玉女”呢？它们又为什么会受到人类的特别宠爱呢？

在图 9-18 布满肥皂液薄膜的铁丝圈边缘，套有一根细棉线，细棉线的另一端被结成一个小圈浮附在肥皂液薄膜上。当我们用小针刺破上述小圈内的肥皂液薄膜的时候，就会看到，小圈内的肥皂液薄膜消失了，小圈被肥皂液薄膜拉成一个像图 9-19 那样的圆圈！

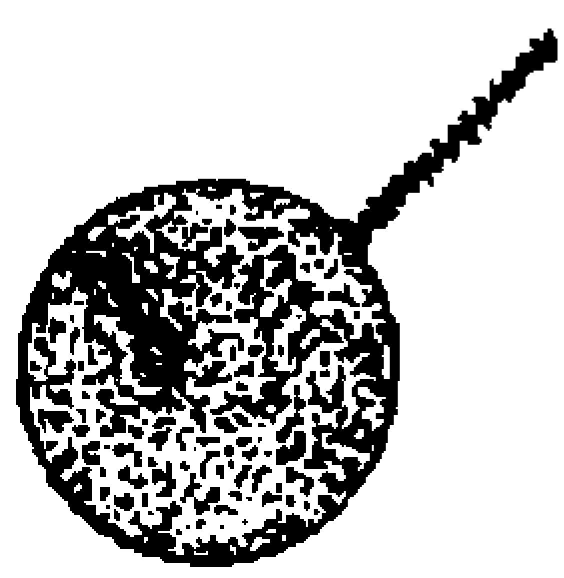


图 9-18

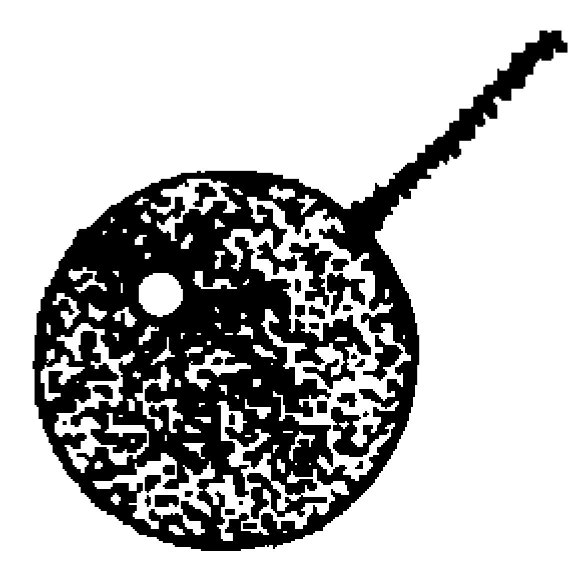


图 9-19

物理学家告诉我们，这是表面张力作用的结果。

我们再来把一滴橄榄油滴入浓度适当的酒精溶液中，您会发现它是十分规则的球形！

这下不用解释了，也是表面张力作用的结果。

不过，这个“表面张力作用”的解释，并不令人十分满意——为什么表面张力作用的结果不是正方形、正方体或其他图形呢？

这时，出生在瑞士的德国数学家斯泰纳（1796～1863）说话了。在周长相等的平面图形中，圆的面积最大；或者说，在面积相等的平面图形中，圆的周长最小。他是在巴黎于1840～1841 年写成的《关于平面，球面和空间图形的极大和极小》

这篇论文中得到这一结果的。类似，在表面积相等的立体图形中，球的体积最大；或者说，在体积相等的立体图形中，球的表面积最小。大自然就是这样神奇地“节约材料”的，生物也是这样的“数学家”，人类也因此对它们宠爱有加。

当然，人类的宠爱还有另一个原因。假设我们的轮子和乒乓球等等都不是圆和球形，那会是什么结果呢？

但是，这些与表面张力作用造就“金童玉女”有什么关系呢？

原来，表面张力有使液体表面收缩到最小的趋势。既然在面积相等的平面图形中圆的周长最小，在体积相等的立体图形中球的表面积最小，那“金童玉女”就在“天设地造”中唯一必然地应运而生了。

根据这个道理，人们在制造铁质霰弹或铅弹的时候，就从高约 45 米的塔上滴下熔化的铁或铅液，让它们在落下的途中凝结成球形，最后落在装有大量冷水的池子之中。

◎第十章

难理解却易明白——研究 π 的价值何在

这里必须杜绝一切疑虑，任何犹豫都无济于事。

——马克思把但丁写的地狱门口的诗句移到科学的入口处

不少数学家认为，目前对 π 的研究已经完结，对 π 的位数越来越多的计算已毫无价值，“这种计算纯粹是一种数学游戏”，是一种“比赛”，和“为了人类的虚荣心”，是“出于好奇”。并认为“在实际生活中用 8 位以上的 π 值，事实上是没有用途的”。

法国天文学家阿拉戈（1786～1853）则说：“从精确度的意义上说，即使圆周长和直径之间存在一个完全精确数字表示的比值，我们也不可能由此得到更好的什么用途。”

卡斯纳（Edward Kasner）和纽曼（James Newma）在《数学和想像力》一书中说，美国天文学家纽康（1835～1909）就认为：“以 30 位小数 π 值来计算已知宇宙周长引起的误差，已微小到用最好的显微镜也分辨不出来了”。

苏联著名数学教育家、科普作家别莱利曼（1882～1942）也认为“长长的一排表示 π 近似值的数字，实际无论在实用或理论上都毫无价值”。

持以上观点的人，大多从实际测量出发，认为“计算的精确度并不能因 π 值位数的增加而增加，它不能超过量度的精确度”。以当今能观测到的不到 200 亿光年——约 10^{24}公里的宇宙为例，如果取 35 位小数 π 值计算，就可以算得周长已精确到小于 10^{-4}毫米数量级！由此看来，如果在计算实际物体精确度的意义上说，35 位以上的 π 值的确毫无价值。

但是，这并不能说明多位数 π 值在其他场合、其他意义上毫无价值。事实上，人们计算越来越多位数等的目的并不只在于实际精度的需要，而在于它对下述各节中重要而广泛的研究，有十分重大的意义。正因为如此，研究 π 才成为古今中外许多人长盛不衰的课题，也是许多人的兴趣所在。日本人柴田昭彦从 1979 年 10 月开始，就与一些算 π 的“世界纪录保持者”进行书面通信，了解到许多第一手资料，并把它们写成受到各方面重视的综述性文章。

“源头茫昧虽难觅，活水奔流喜不休。”法国数学家、物理学家庞加莱（1854～1912）的这段话，是 π 研究者们心态的真实写照。

10.1 对数系理论做贡献

数系经三次扩充，到 18 世纪，已形成自然数、整数、有理数、实数、复数五大数系，但数系的严格理论还没有建立。到了 19 世纪，不但对五大数系的逻辑结构、性质、定义作了

深入的研究，建立起严格的理论，还发现了诸如各种超复数、向量、矩阵，超穷数等。

π 和 7.3 中的刘维尔数 t 这两个超越数有如下区别：①π 的各数字排列没有（明显的）规律，而 t 的数字排列有规律；②（现在还）无法仅凭某一“公式”而不经计算写出任意多位 π 值，但却可以根据刘维尔的“公式”写出任意多位 t 值。于是我们不无理由地猜想，超越数也可以进行再分类。例如波莱尔（1871～1956）就认为有正规数和非正规数之分，等等。

由此可见，对数系理论的研究促进了对 π 更深入的认识；而对 π 更深入的认识，又扩充、发展了数系理论。

10.2 其他数学成就应运而生

由于对 π 的研究，促成了其他众多数学成就的产生。以下仅能作挂一漏万的举例。

（1）欧多克索斯发展了安提丰用边数不断增加的圆内接正多边形逼近圆周、布里森的“内外夹”思想，创立了“穷竭法”，丰富了“逐次逼近法”的内容，体现出“化曲为直”和“以直求曲”的积分早期雏形。不但如此，穷竭法由欧多克索斯发展后，成为阿基米德科学算 π 的先导。“内外夹”则是割圆术的雏形。安提丰法与刘徽割圆又有异曲同工之妙。

（2）在算 π 的过程中，对各种无穷表达式的研究促进相应理论的发展。例如无穷乘积式、连分数理论、最佳逼近理论等。

（3）在布丰用几何法求 π 的过程中，概率论、概率统计等也得到了丰富和发展。受布丰思想的启示，人们还创立了“蒙

特卡洛方法”，这一重要的方法广泛用于计算积分的值、解代数方程、解微分方程和积分方程、随机模拟等。此外，它还在城市建设、化学反应研究等非数学领域有着广泛的应用。

（4）丰富和发展了超越数的理论。

（5）充实了数学美的内容。许多有关 π 的“美妙极了”的公式令人心驰神往，许多高招妙法使人叹为观止。沃利斯、莱布尼茨公式，欧拉求 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots$ 时用的奇妙类比和阿基米德、刘徽充满智慧闪光的割圆术就是其中的典型代表。这也印证了美籍德国数学家柯朗的话：“数学……反映了人们……对完美境界的追求。”

（6）对 π “计算的方法和思路可以引发新的概念和思想。”美国女数学教师、著名学者、科普作家 T. 帕帕斯在《数学趣闻集锦·下》中这样说。

10.3 计算机进展的指标和实用前的特殊试验手段

当今电子计算机的算速越来越快，容量越来越大，软硬件越来越先进。这就给人们提出了新课题：如何对这种进展进行检验？

显然，除了理论研究外，最好的方法是用于“实战”。例如，让它与最好的棋手下棋便是一种方法。1995 年“深蓝”、1996 年“更深的蓝”与卡斯帕洛夫的国际象棋赛就是名例。

另一种方法就是将它用于计算位数越来越多的 π 值这一实战。可以设想，在公式、时间等完全相同的条件下，如果甲机比乙机能算出更多位数的 π 值，无疑甲比乙更先进。当然，这

是从对π进行数值计算这一角度来衡量的。

事实上，能否准确算出位数越来越多的π值，已成了许多专家用来检验计算机可靠性、精确性、运算速度及计算容量的有力方法、手段和衡量计算进展的指标。同时，要创造新的计算方法以克服计算机字长的限制，制造出更新更大的计算机才能计算出更多位数的准确π值，而且费时要尽量少。

屡创算π纪录的日本金田康正教授就说过："挑战圆周率计算纪录对于检验计算机的性能和改进计算方法十分有益。"他还说："π和珠穆朗玛峰一样都是客观存在，我想精确测算出其数值，因为我无法回避它的存在。"

计算多位π值有益于计算机理论的发展。因为一种大规模的计算机服务的程序设计会导致大得多的程序设计能力，这对计算机科学显然价值连城。

每台新电子计算机软硬件在投入正式、经常的使用前，必须进行适当的函数试验，以检验其运算速度、可靠性、精确性、容量、字长等参数是否达到设计指标。其中最常用的试验手段就是让它计算出多位π值。做法是，让编码员和程序设计员在新机上多次练习，计算多位π值。如果该机多次计算都能准确符合已知多位π值，那么说明该机准确可靠，否则不准确、不可靠。并由此得出计算速度、容量、字长等参数的实际值。

具体方法如下：将一个程序用于一台已能正常工作的计算机，如果它能成功地进行多位π值的准确计算，那么说明这一程序能使它正常工作。这时再将这个已经核对无误的程序用于待试机，如果后者也能多次准确无误地计算并达到设计的各项指标，那么，它就可以投入正常、经常的使用。如果相反，计

算出的 π 值有错，那么就说明计算机软硬件中有故障。

一个实例是，1986 年，一个 π 值的计算程序，就检验出一批“克雷-2”（CRAR-2）型电子计算机中的一台，有某些模糊的硬件问题。

另一个实例是，当英特尔（Intel）公司推出奔腾（Pentium）CPU 时，就曾通过运行 π 的计算而找到了一个设计上的小问题。

还有一个实例是，1995 年 6 月下旬，日本东京大学的计算机专家们制作了一款“Super π”软件（图10-1）。它可以用来算 π，但它更适合于用来测试 CPU 的稳定性和测试 CPU 运算所需时间。即使你的计算机系统运行了一天的 Word，Photoshop 都没有问题，而运行“Super π”却不一定能通得过。它的使用方法是，选择你要计算的位数—— 一般选 104 万位，再点击“开始”就可以了。

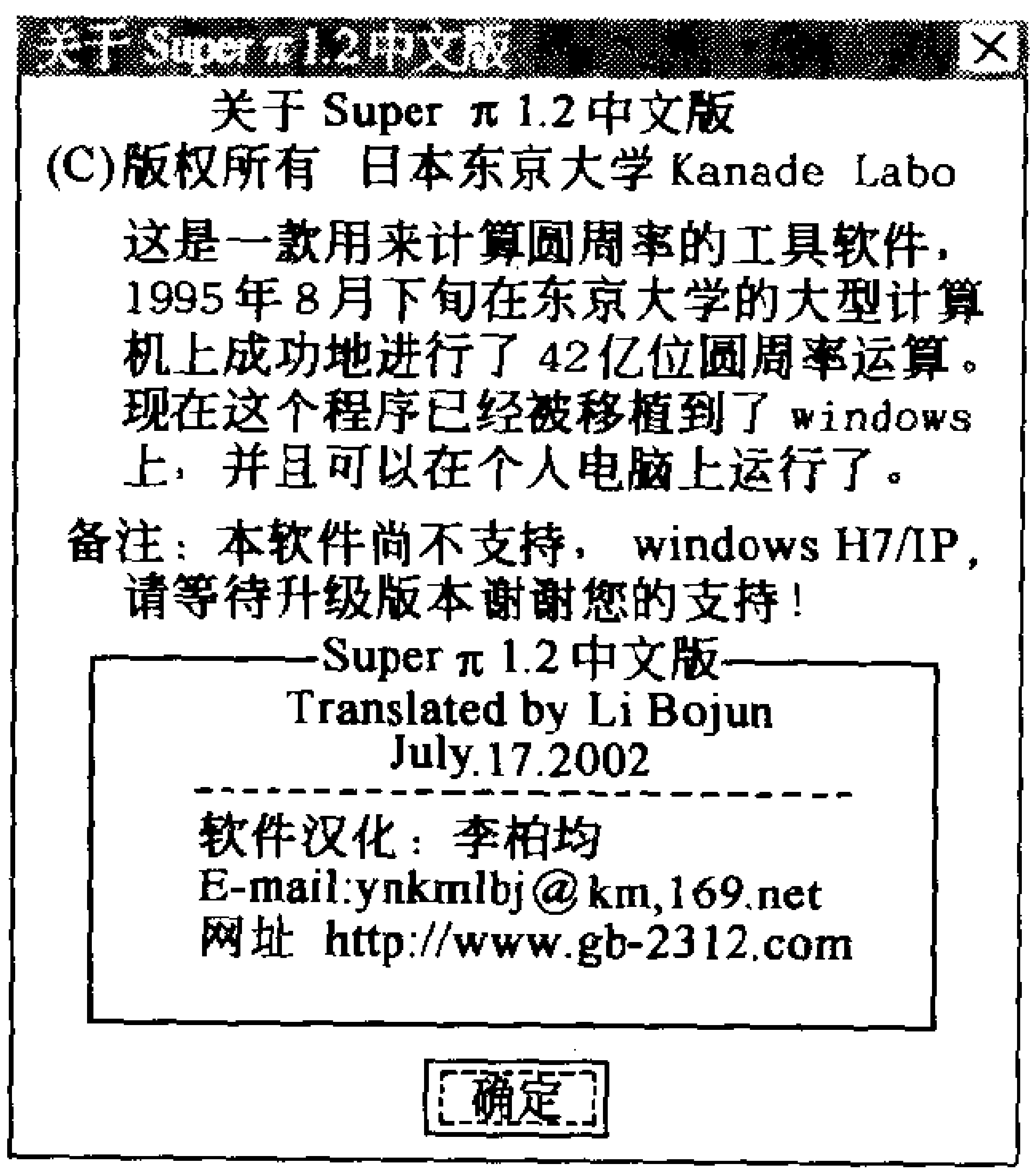


图 10-1

难怪菲利浦·戴维斯（Philip J. Davis）不无感慨地在《大数数学》中说：“奥妙无比的圆周率，如今已沦为电脑的热身工具。”而 I. 彼德森（Ivars Peterson）则在《真理群岛》一书中说：“对电脑而言，最大的挑战就是计算圆周率——它就像

电脑的心电图。”

10.4 认识“计算机对数学的影响”更加深刻

数学理论和方法的进展促进了电子计算机的诞生和变革，计算机的诞生和发展也促进了数学的进展。下面谈谈这种相互促进关系中有关π的3个方面。

(1) 计算机的发明和改进促进了数学问题的解决，有时甚至使人工计算不可能解决的问题变成可能。用计算机算出10万位π值，人们从中看出了各个数字在π值中出现的频率，这有助于对π，e，$\sqrt{2}$这些“大腕”是不是正规数的研究，从而促进这类问题的最后解决。而这10万位则是人工在短期内无法完成的。

事实上，不但π的研究依赖计算机，其他数学研究也是如此。例如，著名的“四色定理”在1976年就用计算机完成了人工没有完成的证明。

(2) 数学新成果的诞生，又促进了计算机的诞生和发展。1873年，威廉·山克斯算出708位π值，由于没有计算机，所以直到1946年才证实有误。人工计算难以再打破1949年的1121位纪录。于是迫使数学家们用计算机加入算π行列。最后，一系列位数不断增多的π值又促使计算机必须改进和发展，以求得更多位数的π值。2002年π值已破12 411亿位大关，如要再破纪录，就必须改进、发展计算机，以克服字长、容量、速度的限制，提高可靠性、精确性。

(3) 计算π的挑战刺激先进计算技术的研究和诞生，而这些先进计算技术又产生广泛的用途。例如，有效地计算线性卷

积和 FFT 就起源于为加速 π 值计算的努力之中，而这些技术在科学和工程领域有着广泛的应用。

10.5 培养记忆的一种良方

记忆越来越多位数的 π 值历来是培养测试记忆力的良方——“国际上将背 π 作为检测和训练人的记忆广度、速度的最好方法之一。”

记忆方法之一是“机械记忆”，而“π 的数值被公认为是检验机械记忆最好的标准”。

最早机械记忆多位 π 值的人已无从考查，但从马青在 1706 年将 π 算到 101 位可以推知，他或他之后的某位“π 迷”可能是最早记忆 100 位以上 π 值的人。

中国第一位背得小数点后 100 位 π 值的，可能是茅以升。他是 19 岁上大学二年级时背得的，曾在学校举办的一次新年联欢晚会的“舞台上畅如流水地一口气背完那小数点后 100 位圆周率数值”。华罗庚也能背 100 位以上的 π 值。“皮肤白净，气质沉稳”的少年朱镕基，中学时代也能背 100 位圆周率。

曾担任某军事学院副院长的少将——钟道隆教授，能背出 1000 位以上 π 值。

2003 年 3 月 18 日，来自湖北天门的 13 岁的脑瘫患儿小明（化名）向记者现场表演——将圆周率背到了 800 位以后。经老师在一旁核对，无误。湖北省残疾儿童康复中心的郭淼老师说：“小明现在能准确背圆周率到 1000 位以后。”

……

当然，他们和下面的“世界级大师”相比，就不值一提了。

2002年5月22日，山东聊城东阿县的村医孙义勇用1小时14分55秒背诵了圆周率小数点后15 000位，创造了背诵圆周率的中国电视吉尼斯新纪录。他的努力是从1989年开始的，目标是背5万位圆周率，挑战世界吉尼斯纪录。2002年5月的时候，孙义勇的成绩在世界上排名第4，而当时世界上背诵圆周率尾数过万位的人也只有8人。

2004年3月14日，在英国牛津大学科学历史博物馆礼堂内众多专家和观众面前，为了替英国“癫痫症治疗协会”募集资金，英国肯特郡亨里湾的丹尼尔·塔曼特，在5小时之内成功地将圆周率背诵到了小数点后22 514位！据悉，塔曼特是世界上25位拥有这项“惊人绝技”的记忆专家之一！

塔曼特是欧洲背诵圆周率数字最多的人，但他却不敢在全世界称“老大”——“老大”是一名马来西亚大学生，他曾在15小时内将圆周率背诵到小数点后67 053位。而在1997年3月3日之前，中国背π的未成年和成年人纪录分别是小数点后1400和11 000位。表10-1为本书没有专门叙述的另外一些比较著名的背π简况。

但是，对于背π，一些人不以为然或颇有微词。例如，巴斯曼（Antranig Basman）就认为：“背诵圆周率可能会导致一些危险的后果，甚至会造成难以愈合的精神伤害。头脑很清楚的人背诵圆周率毫无好处；它一发现你在做这种无聊事，就会展开猛烈的报复。如果你出现了一些症状，就快点停止吧。”

对刘贝贝背π，1997年7月23日，某报一篇题为《救救大人！》的文章说：“平心而论，除了说明记性好之外，又有何益何用！……我们的家长、老师和教育部门，都太注重死记硬背了，结果便出现了种种‘高分低能’现象，读书成绩呱呱

叫，走出校门却少有作为；只会拘泥于前人现成的知识，却缺少自己的发明与创新。”

表 10-1 背 π 简况

序号	人物	时间	位数	单位、国家	用时、差错率、地点等
1	9 岁小学生樊晓	1981.07.07	100	北京育民小学	北京茅以升的家
2	青年女教师王立争	1991.04.17	10 500	吉林联合大学	111 分，吉林联合大学
3	青年女教师王立争	1991.05.07	11 111	吉林联合大学	78 分，0.21%，吉林联合大学
4	12 岁小学生	1994.06.14	1 400	成都商业场小学	422 秒
5	小学生张卓	1995.04.10	4 000	成都实验小学	25 分，0.2%，成都群众艺术馆
6	5 岁女孩刘贝贝	1997.03.03	1 400	南京油泵嘴厂幼儿园	390 秒
7	一名英国人	1957	5050	英国	
8	17 岁西蒙·普洛菲(Simon Plouffe)	1958	8750	加拿大蒙特利尔	3 小时，上法文版的《吉尼斯世界纪录》
9	21 岁拉詹·马哈德万(Rajan Mahadevan)	1981.07.05	31 811	印度	219 或 229 分，无差错，印度曼加罗尔会议厅
10	友寄英哲	1983	20 000	日本索尼公司	
11	“一位记忆家”	1987	40 000	日本	
12	23 岁的敬之后藤(Hiroyuki Goto)	1995.02	42 195	日本	9 小时

对于这类背诵，某报 1998 年 2 月 6 日一篇题为《信息时代需要怎样的人才》的文章也认为：“（会）占据大脑有限的空间以及学生们有限的时间……人的记忆能力是有限的……像背圆周率小数点后一百多位，也就是咱们中国人才会津津乐道于

此毫无实际意义的记忆功夫……注重记忆、背诵是中国教育的传统，死记硬背则是中国人学习的最基本的方法。……到了计算机飞速发展的今天，这种教育只能是一种无用功。”

对这些观点，限于篇幅，不作全面评述。仅就一些问题作简单的抛砖之议。

(1)“占用大脑有限空间”说和“占用有限时间”的说法不能成立。虽然一个人的大脑中记忆单元——由150多亿个脑细胞组成是有限的，然而可贮存的信息、知识量却相当于美国国会图书馆1000多万册藏书的50倍!

英国《独立报》2003年9月14日报道说，研究人员首次计算出人脑的记忆容量，发现人脑在这方面的能力大大超过电脑，证明“电脑记忆力将超过人脑”的观点完全错误。报道说，在《大脑与思维》杂志上发表上述计算结果的科学家认为，电脑的最大记忆容量是10^{12}个字节，比起人脑的最大记忆容量10^{8432}个字节简直不值一提!

因此，任何人都只开发出了其中的极少部分——平均约1/10。而绝大部分“空间”仍然是空的，决不会出现“装不下”的问题。为了学习、记忆知识等花的时间是值得的，因为可以在明天获得十倍百倍的回报——节约更多因为当年获得知识等而“浪费”的时间的回报。

(2)“机械记忆”、“死记硬背”与“高分低能”并没有必然联系或因果关系。能死记硬背100位π值的茅以升、华罗庚、朱镕基并没因此而“低能”；能背出π，e，$\sqrt{2}$许多位的拉马努金并非“少有作为”。中国不是只有一个文学家茅盾“死记硬背”得整本《红楼梦》。著名史学家、中国社会科学院研究员庞朴（1928～）要求他的学生必须背诵30部（篇）以上

有用的书或文章，他当年读私塾时就“背了好多书”而受益终生。

(3)背 π 并非“毫无意义”。许多要孩子背 π 的家长，并不是以孩子背多少位 π 值为最终目的，而是将背 π 作为启发孩子记忆的脑力保健操或熔炼如钢意志的高温炉。本书作者并不主张强行让青少年们都去背 π 而创造什么吉尼斯世界纪录；但是，如果有一个青少年自愿且迷上背 π，要去创造吉尼斯世界纪录，一定为他击掌叫好！巴西球王贝利小时用破布塞在袜子里当足球踢，他的这种痴迷在上述“背圆周率毫无意义”论者看来，肯定更加“毫无意义”，殊不知“冠军从这里起飞”。“书痴者文必工，艺痴者技必良”（蒲松龄），就是这个道理。

下面周婷婷（1980～ ）的成功和蔡志杰的成长，就是这个道理的一个典型例证。当然，他们的成长还有其他因素。

2001 年 11 月，许多媒体都报道了这样一则消息：今年 21 岁的聋女周婷婷，在 1988 年 6 月开始背圆周率。开始的 100 位很快就背下来了，但背到 400 位时实在太枯燥了。她的父亲周弘巧妙地引导女儿，把每个数字与对应的字母相联系，再编出一个故事讲给婷婷听。父女使出了浑身的解数，想尽一切办法，终于，8 天后婷婷成为世界上第一个能够背出圆周率小数点后 1000 位的“神童”，被载入吉尼斯世界纪录。周婷婷 3 岁半时才开口说话，11 岁被评为全国十佳少年，16 岁进入辽宁师范大学教育系特殊教育专业学习，成为中国第一位聋人少年大学生，17 岁被评为全国最年轻的自强模范。当时，周婷婷已经从辽宁大学毕业，即将到世界上最好的聋人大学——美国盖特劳大学读书。

2002 年 6 月 18 日，赣州钴钨有限责任公司幼儿园的 6 岁

小男孩蔡志杰毫不胆怯地面对着记者，一口气就把圆周率小数点后面的 200 位数字背了出来。蔡志杰的父亲介绍，他很注重让孩子通过感官来感知世界，并教育孩子勤于观察，善于思考，按关键期与潜能开发系列丛书中的提示，对孩子进行记忆、语言和数学发展基础训练。在“学中玩、玩中学”的过程中，孩子花了半个月左右的时间，就把圆周率小数点后面的 200 位数字背得滚瓜烂熟。

（4）聪明超群与记忆力密切相关。1901～1973 年诺贝尔奖得主为 411 人，其中犹太人多达 65 位，占 16%。美国耶鲁大学和瑞典哥特布瑞格大学的脑科学家，经过多年研究揭开了这些犹太人聪明超群的谜底：与惊人的记忆力密切相关。美国记忆学专家斯坦娜在《脑力倍增法》一书中也认为，提高记忆是提高学习成绩的关键。

可见，现代人不能完全抛弃大脑记忆甚至其中的死记硬背，背圆周率并非毫无意义。

此外，背诵圆周率还是一些人的乐趣。大卫·布拉特纳（David Blatner）就说：“背诵圆周率的唯一好处，大概就是能在鸡尾酒会上露一手绝活。但这有什么不对？有人问伏洛克（Alexander Volokh），为什么要浪费这么多时间和精力去背诵圆周率？伏洛克回答：‘当然，没有人需要用到 167 位圆周率。大多数人都认为背诵圆周率是件无聊事；但这也没有关系。谁说数学一定要有用？难道英语就只能用来订比萨饼吗？’”而平尼（Gregory Pinney）则在《明尼亚波利斯－圣保罗影视新闻论坛报》上撰文说：“对喜欢炫耀记忆力的人来说，圆周率是最理想的记忆对象，因为它的数字排列完全没有规律。”

背诵多位 π 值，各有高招。例如，爱丁堡大学教授艾特坎

(Alexander Craig Aitken) 曾一口气背出 1001 位 π 值。马丁·加德纳在他的《追根究底》一书中说："艾特坎不相信任何记忆技巧。他说，'记忆力就像一池清水，联想技巧只会把池水搅浑'。他背诵圆周率的方法，是将 50 个小数分为一组，再将这组数字分成 10 组 5 个数字，'再用一套独特的韵律朗诵。如果不经过这一番简化，再怎么背诵也徒劳无功。'"

而 I. 彼德森（Ivars Peterson）在描述西蒙·普洛菲 (Simon Plouffe)背诵圆周率时说，他"就像一个在沉思冥想的高僧。为了记忆这些数字，常常把自己关在房里——没有光线、噪音、咖啡和香烟。西蒙·普洛菲说，'简直和苦行僧一样'。他默念着这些数字，让它们慢慢渗入脑海。"

显然，背诵多位 π 值并非易事。"圆周率并不是一串随机数字。圆周率是一场旅行，一个经历。除非你能找出它浑然天成的节奏，否则背诵它就难了。"巴斯曼（Antranig Basman）这样说。

10.6 检验公式优劣的特殊手段

如果由一台电子计算机在相同条件下，先后用两个不同的公式算 π 到同样多的位数，假设前一公式用时少，后一公式用时多，那么我们说在这种条件下前一公式比后一公式算 π 更优。可见，计算 π 值可作检验公式优劣的特殊手段。

算 π 的历史上不止一次出现过以上场面。5.5 的 3. 中的雷恩奇和丹尼尔·山克斯，用同一台 IBM-7090 型机，先用斯托默公式把 π 算到小数点后 100 265 位，用了 523 分钟，然后用高斯公式算到相同位数，仅用时 481 分。由此看出，在这种

条件下，高斯公式更好。

1991年底，广东嘉士利饼业公司的工程师李文军和广州万通电脑公司梁建平合作，在IBM-PC型微机上，用高斯的$\pi=12\arctan 1/4+4\arctan 1/20+4\arctan 1/1985$算出前20位π值，用时2923毫秒；而由同一微机用李文军的$\pi=16\arctan 1/5-4\arctan 1/240-4\arctan 1/57\ 361$算到相同位数，仅用时2905毫秒。这说明李文军公式在该条件算20位π值时，比高斯公式优越。

又如，我们在5.5的6. 中提到的“四次方算法”，就比“沙-波法”快些——116小时对131小时，说明前者更优。

这又是一件趣事：因为算π值而发现了不同的公式（或方法），而算π值又能检验这些不同公式（或方法）的优劣。由此，我们提出下面似乎奇怪的问题：有没有算π费时最少的公式呢？如果有，是什么样子的公式呢？又如何去寻找这个公式呢？

10.7 数学需要时刻严密吗

数学，一直被人们视为最严密的科学。果真如此吗？

约公元前6世纪，数学之父泰勒斯发明了几何演绎法，使数学“从实验室走向书斋”，成为“严密”的科学。特别是“第一次数学危机”得到解决后，人们不完全相信经验的可靠性了。但在克服“第二次数学危机”之后，人们又看到数学成为严密科学的希望。然而，至今还没有完全消除的“第三次数学危机”，使数学家们认识到任何所谓严密的形式体系，都不是天衣无缝的——数学至今仍然是一门“漏洞百出”的科学。

实际情况就是这样。当人们陶醉、推崇数学那“完美”推理的同时，却发现会引起谬误。中国古书《庄子·天下》篇说，哲学家惠施提出“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，被誉为“原始的极限思想”。但事实上，经过简单计算就可以知道，一尺之棰只需经过两个月的“日取其半”，便已达到 10^{-19}米数量级——小于当今物理实验可达到的最小尺度 10^{-18}米，而无法再“日取其半”了。这里，我们看到了因为追求数学纯“严密”推理而带来的失误。

古希腊柏拉图说：“数学是现实的核心。”任何脱离现实而企图“严密”的科学都将导致失误，在这个意义上，任何学科的“严密”都是相对的。对此，俄国数学家切比雪夫（1821～1894）曾风趣地说：“使数学脱离科学的实际需要，就好比把母牛关起来，不让它接触公牛，其结果是使它不出成果。”而丘成桐则说：“完美的圆和正方形在自然界中是没有的。”

用 3.14 代替 π 求圆面积时，实际得到的已不是精确值了。但这无关紧要，只要在允许误差之内。事实上，任何实测都是近似值。但我们大可不必为此忧心忡忡。

德国的红衣主教德·库萨·尼古拉斯（1401～1464）把圆分成许多顶点在圆心、底边在圆周上的小“等腰三角形”（图 10-2），并将底边与圆心之间的“中心距”与周长相乘，则这个积的一半就是圆面积。这一方法显然是“不准确的”——小扇形不是小三角形。但这一“不精确”的方法却得到正确的结果。这种方法形象直观，于是在当今小学数学课本中占有一席之地。公元前约 1000 年印度数学家戈涅西也用过上述“不精确”方法得出圆面积。

无独有偶，开普勒（1571～1630）在他 1615 年的《测量

酒桶体积的新方法》中，对圆和球也用这种方法处理（图10-3）。在这里，我们再次看到数学方法的魅力以及“严密”与“不严密”之间奇妙的区别与联系。当我们在佩服数学家明察秋毫地把“=”和“≈”区别得如此清楚之时，却随时将其混用——特别在应用学科中。

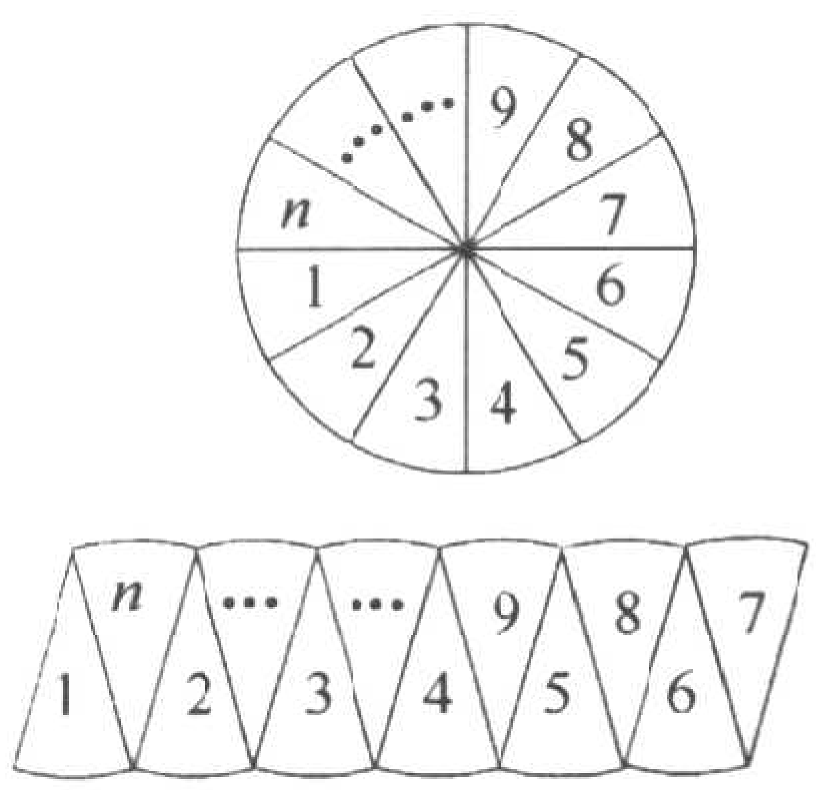


图 10-2

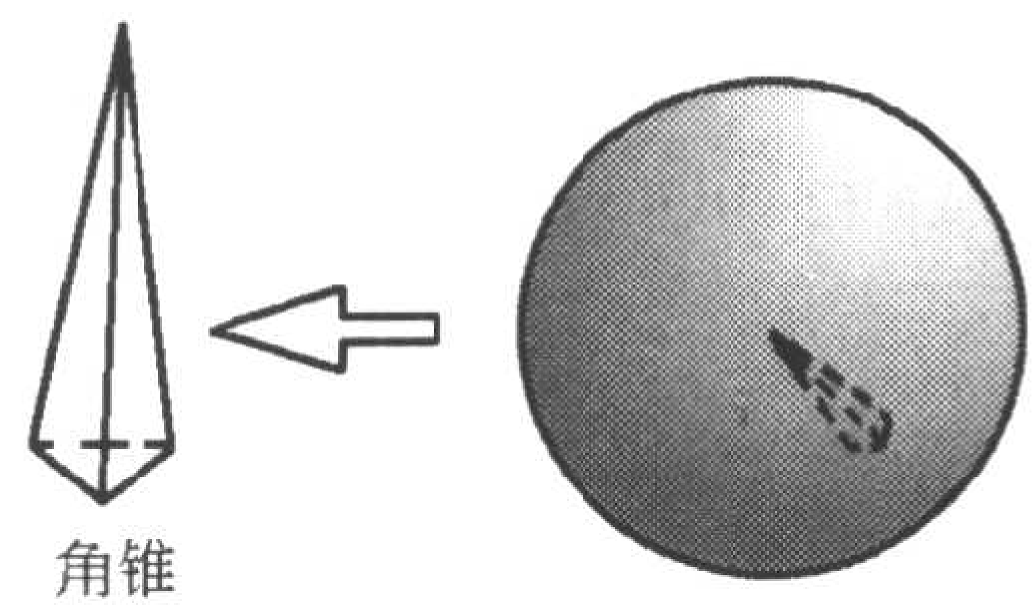


图 10-3　开普勒把球化为多个角锥

10.8 π 衡量一个国家的数学水平

π的研究成果，在一定程度上反映出一个民族的数学水平，有人甚至认为它是标志科学发展的里程碑。德国数学史家康托尔（1829～1920）记叙了从远古到1799年全部数学史的《数学史讲义》一书中就指出：“历史上一个国家所算得的圆周率的准确程度，可以作为衡量这个国家当时数学发展的水平的指标。”

史实说明了这一点。算π巨人阿基米德时代，正是古希腊数学和科学的鼎盛时期。刘徽和祖冲之生活的3至5世纪，正是中国数学和许多方面在世界领先的时代。15世纪阿尔·卡西

的 17 位 π 值，得益于他新造的计算月食和行星位置的计算器具，也是中世纪阿拉伯地区在世界科技、数学发展史上占有很重要地位的标志。从 1579 年法国韦达首先给出 π 的解析式以后的几个世纪，是欧美数学和科技处于世界领先水平的时期。1949 年电子计算机算 π 标志着美国科技的领先地位和数学的较高水平。

10.9 体会"认识自然不会穷尽"

世纪之交的 1900 年 4 月 27 日，英名盖世的英国皇家学会会长开尔文（1824～1907），欣喜地宣告物理学大厦已经建成，没想到话音刚落，这座大厦就被量子论和相对论两大风暴摧毁得瓦砾遍地。同年，法国数学家庞加莱（1854～1912）声称的"数学绝对的严格性已经达到"的结论，也被"第三次数学危机"、特别是奥地利数学家哥德尔（1906～1978）的不完备性定理，把"严格性"的基础彻底摧毁，使数学界目瞪口呆。无独有偶，在最近这个世纪之交，不少人认为基础科学已经达到"顶峰"，以至引出 1999 年 6 月 2 日华裔物理学家杨振宁在北京师范大学对这种"顶峰"论的异议。无数事实表明，对自然界的认识不会穷尽——人类不必为自己的各种得意之作沾沾自喜。

人类对 π 性质的认识，虽然经历了整数、无理数、超越数的认识过程，但最终的认识尚未完成，也不知道什么时候能完成。这也和认识大自然的任何事物一样。用在英国剑桥工作过的奥地利生化学家佩鲁茨（1914～　）的话说是，"科学是不能计划的"。佩鲁茨是大名鼎鼎的 DNA 双螺旋结构的发现者

之一、1962年诺贝尔医学和生理学奖得主克里克（1916～2004）的老师，也是同年诺贝尔化学奖得主。

可是，在π的若干历史关头，人们普遍相信它的本质上有意义的每件事都被发现了，特别是不存在关于π的根本性的新公式。在1971年出版的佩特·贝克曼的《π的历史》一书最后一章的172页，使人联想起这种情绪。然而才过了5年，“沙-波法”就被发现，这是令人“啼笑皆非的”。直到2000年第3期《数学通报》上，还有《祖冲之是如何算π》的论文。可见π的研究并未“到尽头”。看来人们还不熟悉居里夫人(1867～1934)富有哲理的思想：“永远看不到已经完成的，只能看到没有完成的。”

希尔伯特说：“认识自然和生命是我们最崇高的任务。”这个任务异常艰巨，探索过程无穷无尽，但最终却是可知的。他在1930年接受哥尼斯堡荣誉市民称号的讲演中，针对一些人信奉的不可知论观点，满怀信心地宣称：“我们必须知道，我们必将知道。”希尔伯特的豪言壮语，激励着我们去探索无穷无尽的自然和无穷无尽的π!

10.10 基础科研对急功近利说“不”

自1989年起，中国每两年颁发一次国家自然科学奖。从1989年至2003年的8次颁奖中，竟有1991，1995，1999，2001年4次的一等奖空缺！1997年，中国科学院自然科学史研究所研究员董光璧认为，这种空缺表明中国科学水平在下降和中国科学事业的危机。其原因并不是中国科学家智力水平在下降，而是中国科学政策出了问题——主要是过于偏重科学的

实用价值。现在中国经济不发达，要科学家为推动经济发展做贡献无可非议。但以降低科学水平为代价争取经济增长未必明智。这样做，不但利用别国成熟技术的后发优势将会随着经济的增长而丧失，而且由于科学水平差距拉大，利用公共科学原理发展技术的机会也会落空。科学不只是人类适应生存的手段，更是人性本质力量的反映。发展科学是成就人性的一个极重要的方面。

为了发展经济搞科研无可厚非，但科学的目的并不止此。古希腊斯托比亚斯（约 500 前后）记载的故事说，一个学生才开始学习，就问学了几何之后将得到什么好处。欧几里得回答说："给他三个钱币，因为他想在学习中获利。"可见欧几里得也反对功利主义，不赞成狭隘的实用主义观点，爱因斯坦那著名的"只有不依赖科学谋生，科学才美好"的观点，反映了同一精神——古希腊崇尚的科学精神。而这种精神造就了古希腊无与伦比的辉煌和至今仍振聋发聩的一大批伟人。科学精神的含义异常丰富：探索、怀疑、实证、理性是不可分割的四个方面。对 π 的研究同样适合。"再研究 π 已没有实际价值"和为"三个钱币"研究 π，则有悖于这种精神。

对此，名家早有论述。1830 年 7 月 2 日，德国数学家雅可比（1804～1851）在给法国数学家勒让德的信中说："傅里叶先生认为，数学的主要目的是服务人类、解释自然现象；但像他这样的哲学家应当知道，科学的唯一目的是为了人类心智的荣耀，因此，一个关于数的问题与一个关于宇宙体系的问题具有同样的意义。"

基础科研有时并不立即显现"效益"，但这并非没有"后劲"。2000 年前阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》于 17 世纪才



图 10-4 开普勒

在开普勒（图10-4）的“天空立法”中得到光辉的应用。在1854年“纸上谈兵”的黎曼几何中，发现了广义相对论的模型以及原子和“基本粒子”的结构，其中群论和希尔伯特空间起了重要的作用。欧几里得的《几何原本》和爱因斯坦的“相对论”当时并没有“效益”，而它们却给人类带来了永恒的福祉。2002年国家最高科技奖得主王选（1937～　）的发明，早先认为是一个“数学游戏”，而他正是从这个数学问题起步才研发出一项世界领先的技术——精密汉字激光照排系统的。如果当年王选急功近利追求眼前“经济效益”，不去做那个“数学游戏”，“告别铅与火，迎来光与电”的时代就会被推迟多年，北大方正就不会成为中国高校技术产业的“大哥大”。

对此，名家也有论述。1986年，美籍华裔数学家陈省身在香港中文大学作《什么是几何》的演讲中说：中国数学千余年来发展不快，在于太注重实践，而忽略了许多暂时没有应用的理论。

2000年3月18日，英国费伯和美国布卢姆斯伯里两家出版社，宣布悬赏100万美元奖励在两年内证明哥德巴赫猜想

(“1+1”) 的人，这很可能和陈景润 (1933～1996) 的 “1+2” 同样一时没有 “经济效益”，但谁敢断言有朝一日不大放异彩呢？类似，又有谁能断定继续研究 π 出现的新成果，到时不光芒四射，甚至产生 “经济效益” 呢!

美国数学家纽曼 (James Newman) 曾经说：“数学最抽象无用的研究被人们发现以后，常常被其他部分所俘获，成了解决问题的工具。我想，这不是偶然的，就好像一个人戴了一顶高帽子去参加婚礼，后来在火灾时发现它居然可以当水桶用。” 这确实是精彩的比喻。

1620 年 11 月 11 日，“五月花号” 帆船由欧洲历经 5000 公里的航程，抵达美国东北部海岸的普利茅斯海滩。此时有 102 人，第一年冬天就冻死了 1/3，但英国传教士哈佛 (1608～1638) 仍旧动员人们把捎带的图书捐出来办学。最终成就了 “先有哈佛，后有美国” 的那所举世景仰的大学。在哈佛望尘莫及的物质文明高度发展的今天，我们不会连他的眼光都不如吧!

“科学是不能计划的。” 这就是我们不能忽略基础科研的理由，也是我们不能贬低对 π 的研究的理由。

贬低研究 π 的人，贬低研究 π 的价值，这是不少人——包括一些名人的 “时髦”。对此，我们也用时髦的话来应对：“没有任何理由。”

◎第十一章

等您大显身手——有关 π 的谜

自然界不会一下子披露她所有的秘密。

——塞涅卡

11.1 谁是安托尼兹

1585 年，安托尼兹重新发现了 355/113。大致同时，梅蒂尤斯也发现了 355/113。那么，安托尼兹是不是梅蒂尤斯？这个疑问的产生缘于两者的外文名、生卒年、国籍都有不尽相同的记载。

（1）外文名。有 Peter Metius，Adrien Metius，Adriaen Anthonisz，Adriaen Anthoniszoon，Anthoniozoon 5 种。前 2 种译梅蒂尤斯，后 3 种译安托尼兹，不知两者是一人还是两人？

（2）生卒年。有 1543～1620，1527～1607 两种说法，而梅蒂尤斯的儿子梅蒂尤斯（Adrien Metius）的生卒年是 1571～1635。因此这两种说法都可能成立。如是一个人，那这两种生卒年如何"合并"？如是两个人，是不是相差 16 岁的兄弟？

(3) 国籍。有“出生在德国、荷兰工程师”，是“法国梅兹人”等说。本书认为梅兹（或译麦次）为安托尼兹家族的祖籍，发现 355/113 的、后来成为荷兰工程师的老梅蒂尤斯（或安托尼兹）就出生在那里。正因为如此，老梅蒂尤斯才有两个名字：梅蒂尤斯（从祖籍地名）、安托尼兹（迁居荷兰后另改的名字）。梅兹可能现在法国东北部，当时在德国。

于是，老梅蒂尤斯的一个儿子就有两个不同的名字。但矛盾的是相差 16 岁不好解释。

11.2 鲁道夫是哪一国的人

鲁道夫有德国人、荷兰人、“原籍德国，但大部分时间在荷兰度过”等多说。本书认为：鲁道夫是现在荷兰国界内莱顿的荷兰人；也是当时德国国界内莱顿的德国人。而不是“出生在德国后来又到荷兰去的人”。这有什么依据呢？

舍普勒的《π 的年表》说，鲁道夫是当时德国（Germany）莱顿（Leydn）的人。他死后也葬于莱顿的圣彼德教堂的墓地（Peter 's churchyard）里，死后遗作也在莱顿出版。由此可以看出，鲁道夫是当时德国国界内（现在荷兰国界内）莱顿的德国人。

现在荷兰的莱顿怎么跑到德国去了？原来，当时比利时（1930 年脱离荷兰成为王国）、荷兰、德国北部一带的疆界与现在不一样，当时德国莱顿现就在荷兰了。于是德国人就把 π 称作“鲁道夫数”——从他死后某个时候开始的。于是联邦德国和意大利合拍的彩色电影《向往未来》，就称鲁道夫为荷兰人了，因为面向的是现在的观众。于是苏联数学史家雷勃尼科

夫（1913～　）在1974年出版的《数学史》一书中，也就说他是荷兰人了。

许多文献将荷兰称为尼德兰，其实两者既有联系又有区别。14世纪前没有荷兰国，所以称“尼德兰”或“尼德兰北部”。荷兰在尼德兰资产阶级革命后的1581年才建立。其后，据维也纳会议的“最后决议”，比利时并入荷兰，成立尼德兰王国，由荷兰国王进行统治。因此1581年的国名已不是“荷兰”，而是荷兰、比利时合并后的“尼德兰王国”。

有资料说，鲁道夫“是俄国人”，不知此说源于何处。

11.3 王蕃142/45的来历及王蕃和刘徽谁先

《隋书·律历志》称：“自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，……”如果此书中记述各人算π的时间是严格地依年代先后的话，那么王蕃算π在刘徽之后。

根据“王蕃于刘徽之后”，严敦杰《隋书·律历志·祖冲之记事释》，就认为王蕃的142/45，是像5.2的2.（24）所说的那样，是修改刘徽的3.14得来的。

那么，有没有这种可能呢？那就要看刘徽得出3.14的时间，和王蕃有没有在生前得知3.14的可能。刘徽《九章算术·注》自序作于263年即（魏）景元四年。王蕃是三国时代的吴国人，在吴王孙皓晏请群臣时贪杯失态，被孙皓怒斩，活了约39岁。但王蕃的生卒年却有“229～267”、“228～266”、“219～257”等说。因此，如果王蕃死于257年，那么完全不可能由刘徽的3.14推得142/45。如果王蕃死于266或267年，那么似乎有参考刘徽的3.14推得142/45的可能性。

然而，后一种可能性不大。这是因为：①刘徽的《九章算术·注》，可能在265年即司马炎篡魏称帝的晋元年还没有完成，甚至有可能在王蕃死的时候也没完成或公开传播，王蕃不可能看到3.14；②当时三国鼎立，战云笼罩、相互敌对，导致信息传递缓慢。因此，自263年以后，即使刘徽已于266或267年以前的两三年完成著作，王蕃得知刘徽的3.14的可能也不大。三上义夫（在《中国的化圆为方》中）和孙炽甫等也有这样的看法。

那么，这时又如何解释前述《隋书·律历志》中，王蕃列于刘徽之后的记载呢？这也不难解释：这些年代相近的人物、事件，没有严格按时间先后记述。

但是，上述推测、分析不能代替史实。因此，就有3个谜：王蕃的生卒年，王蕃的142/45是不是从刘徽的3.14推出的，王蕃的3.14是从何而来的。

11.4 3927/1250来自何人

《九章算术·注》中有$\pi=3927/1250$——3.1416，是谁算出来的？至今仍然没有定论。

第一种说法是，是刘徽算出来的。钱宝琮、华罗庚、钱伟长、励乃骥、三上义夫、李约瑟、唐代李淳风（注《九章算术》时）等持这种观点。第二种说法是，是祖冲之算出来的。李籍、李潢、程纶、余宁生、李俨、孙炽甫、李迪等持这种观点。第三种说法是，是刘歆算出来的。岑建功、茅以升、许莼舫、赵缭等少数学者持这种观点。

为什么会产生这些不同的见解呢？主要原因是，记载这个

数值的《九章算术·注》出自多人——刘徽、祖冲之、李淳风等之手，所以弄不清哪个人具体注了哪些内容，出现许多令人费解的话，从而引起不同见解。现将重点辑录在下面。

（1）《九章算术》每卷均题有“魏”字，且有刘徽在魏景元四年即263年的自序。这能不能说明刘徽在魏入晋（司马炎篡魏称晋帝在265年）之前的263年，已经注完了《九章算术》？

（2）《九章算术》第四章即“商功”章中，有“晋武库中汉朝王莽（所）作铜斛”的铭文。这是谁的注？

（3）《九章算术》第一章即“方田”章中，李淳风的注中谈到“今者修撰，攈摭诸家，考其是非，冲之为密，故显之于徽术之下，冀学者所裁焉”。由此看来，3927/1250当属祖冲之。但在另一段注文中，却又有“徽虽出斯二法，终不能究其纤毫也”。如果将“二法”理解为157/50和3927/1250，那么3927/1250当属刘徽。这“二法”究竟如何理解？

（4）在《九章算术》的刘徽注中，牵涉π值计算的20道题都用3. 14来算。如果刘徽已经发现了3927/1250，那么他为什么一处也没有用呢？

（5）刘徽注“若此者，盖尽其纤微矣”是什么意思？

（6）商功章中“祖疏”二字，经励乃骥考查，宋本及聚珍本都写成“粗疏”，而孔刻本误作“祖疏”；于是他断言：“晋武库……”等话是刘徽注，而先用3927/1250的是祖冲之。

下面，我们就上述（1）～（5），来看前述第一种说法和第二种说法。

①可不可以由（1）得到刘徽已经在魏入晋之前两年即263年，已经注完《九章算术》的结论呢？持第二种说法的人

认为，“一般注书，写序乃是收尾工作”，因而刘徽在 263 年或更早就注完了。但是“写序乃是收尾工作”的说法并不都成立，因为也有先写序的。而且，所注“魏”字并不排除后人加上去的可能。所以，没有足够证据说明刘徽在 263 年或入晋之前，已经注完了《九章算术》。也就是说，魏入晋之后注完的可能性也存在。

②由（2）中有“晋武库”一词，而 3927/1250 的来源就是从晋武库中所藏王莽铜斛说起的，于是谁有可能、谁没有可能说出这个词就很重要。持第一种说法的人认为，虽然直到 265 年刘徽的注还可能没有完成，因此不可能说出这个词，也就不可能写出与这个词相关的那段文字。但是，有可能在后来补上这段文字。原来，古代统治王朝都设立了一个武库，而各朝的武库中却未必有王莽铜斛。如果魏武库中没有，而晋初的武库才搜罗到王莽铜斛，刘徽在晋初的武库中才能看到。那么，他要说“晋武库中”就自然而必要。而祖冲之则不可能说出“晋武库”，因为尽管他对王莽铜斛很有研究，却未必能看到它。即使他在宋或齐的武库中或别处见到王莽铜斛，他也不会说出这样的词。这就像现在如果有人在北京故宫博物院看到汉朝遗留下来的王莽铜斛，也不会说出“清坤宁宫中的王莽铜斛”一样的道理。这就是说，只有在晋武库中见到王莽铜斛的人才会说出“晋武库”一词；即使看（不是在晋武库中看）到王莽铜斛，也只会说出“王莽铜斛”，而不会说出“晋武库”。这样，就排除了祖冲之说出“晋武库”的可能性，只有刘徽才会说出“晋武库”。由此，不能从说出“晋武库”一词，由时间上排除刘徽得到 3927/1520 的可能性。而恰好相反，刘徽注中说 157/50 是从计算圆内接正 192 边形的面积得来的，3927/

1520 是从计算圆的 3072 边形的面积来证实的，文气连贯，不像是两个人的手笔；因而求得 3927/1520 的是刘徽。

持第二种说法的人认为，“晋武库”一词和那段文字，刘徽是在第一章即“方田”章第 32 问之后注的，按写作习惯，应在其余八章和序之前，即早于 263 年。此时魏国还没有灭亡，刘徽又是见过王莽铜斛的，所以显然刘徽不能称“晋武库”。而祖冲之是东晋灭亡之后刘宋时代的人，在过去晋的武库中见到这个铜斛，或者知道这个铜斛来自晋武库而进行评论，可能在再注九章的时候就写了进去。他称“晋武库”和当代人称“清宫”为“故宫”相似。而且，王莽在当年按郡数铸造了 100 多个铜斛颁行天下，今故宫博物院内还有一个；虽然晋武库在惠帝元康 5 年即 295 年曾遭火灾，后来又遭“八王之乱”等，但在南北朝之际铜斛还不至于绝灭。所以，当时祖冲之所见到的铜斛，必然是东晋武库的遗物。既然如此，涉及“晋武库”一词的内容就不是刘徽而只能是祖冲之所注了。

③“冲之为密，故显之于徽术之下”能得出什么结论？

持第一种说法的人认为，李潢写《九章算术细草图说》的时候，怀疑从“晋武库”开始的一段文字是祖冲之写的，就是因为李淳风等所谓“显之于徽术之下”的话。这就把 3927/1520 的首创权归于祖冲之了。事实上，方田、少广、商功三章有关圆面积的问题，原有答案都照“周三径一”计算，而刘徽注都用他的第一个 π 值即 157/50 来修正，李淳风注时又补用祖冲之约率 22/7 的算法。李淳风等以为 22/7 比 157/50 更精密，所以“显之于徽术之下”，指的是在“徽术”之后加上“密率”的算法，而并不是说在刘徽注之后补充祖冲之的注。也就是说，3927/1250 并不是祖冲之的补注，而是刘徽的注，

所以刘徽是 3927/1250 的首创者。

持第二种说法的人认为，祖冲之与戴法兴辩难的时候说过："至若立圆旧误，张衡术而弗改，汉时斛铭，刘歆诡谬其数，此则算氏之剧疵也。"《隋书·律历志》又有"祖冲之以圆率考之，此斛径当 1.436 192 尺，庣旁一分九毫有奇，刘歆庣旁少一厘四毫有奇，歆算术不精所致也"的记载。所以，"考其是非，冲之为密，故显于徽术之下"这段话，正是祖冲之"攈摭百家"，议论他们的圆周率的话。而现在传本刘徽的注文中"晋武库"这段修正圆周率的议论，可能是被后人窜入刘徽的注文中混淆起来了。这就是说，"冲之为密"这段话是祖冲之议论"百家"的圆周率之后，补进他自己更精密的 3927/1250 的意思，当然这个值由他首创。

对（3）中"二法"的理解。持第一种说法的人认为，"二法"是指刘徽的 157/50 和 3927/1250 这两个值，因而 3927/1520 是刘徽首创。而持第二种说法的人则认为，刘徽每步割圆的时候，所取的上界和下界就是"二法"，所以"二法"并不是指他的 157/50 和 3927/50。因此，"二法"不能作为刘徽首创 3927/1250 的证据。

关于"二法"，还有一个插曲。依据毛氏汲古阁影宋抄本，李淳风等注释有"周径相乘，数难契合。徽虽出斯二法……"这段话，被传刻本改作"出斯一法"，后来的读者很容易被它蒙蔽。而这个传刻本的依据是戴震（1722～1777）所校对的微波榭本。而毛氏影宋抄本很可能还保存在国家图书馆，可以查证。

④由（4）可以得出刘徽没有得到 3927/1250 的结论。因为他如果得到了，就会用它来代替 157/50，正如他用 157/50

来代替原来不准确的3一样。退一步说，即使他嫌用3927/1250来算题比较麻烦，也应该在20个题中拿一两个例子来作示范，但却没有。

⑤(5)那段话，持第一种说法的人认为，是刘徽得到3927/1250后自鸣得意说的话，因而它是刘徽得到的。如果首创3927/1250的是祖冲之，那么，无论他是在得到355/113之前还是在之后，都不会说出“尽其纤微”的。

⑥持第一种说法的人认为，如果3927/1250是祖冲之首创，唐初李淳风等把它“显之于徽术”之下，那么，五六世纪的阿利亚巴塔是看不到的。或者，如果他和其他印度数学家不但看到了刘徽的《九章算术·注》，而且看到了祖冲之的《缀术》或他的《九章算术·注》，那么他们为什么从来没提起过祖冲之的约率、密率，而却用过3927/1250和张衡的$\sqrt{10}$呢？因此，不论从哪种情况都可得出3927/1250是刘徽首创的结论。此外，印度古代算球体积，用的是《九章算术·少广》中不准确的$V=9D^3/16$，而没用祖暅修正后更准确的$V=11D^3/21$，也可以作为祖冲之父子的成果在当时没有传到印度的证据。

而持第二种说法的人则认为，印度数学在五世纪前没有发达，凡是与中国算法类同的作品，多在六世纪以后。南北朝时期佛教势力扩张，中印往来密切，中国数学成果传入印度的机会增多，所以刘徽、祖冲之注的《九章算术》传入印度便不足为奇了。从年代来看，阿利亚巴塔出生时，祖冲之快50岁了，因此有借鉴祖冲之的3927/1250的可能。

11.5 3927/1250 是如何算得的

说刘徽算得 3927/1250 的方法，有两种说法。

第一种说法是，来自他的割圆术，是算到 3072 边形求得的。

第二种说法是，来自对刘徽一段话的推测得来的两种解释。刘徽说，“差幂六百二十五分寸之一百五，以十二觚之幂为率，消息。当取此分寸之三十六，以增于一百九十二觚之幂，以为圆幂三百一十四寸，二十五分寸之四”。其中“觚”、“幂”相当于现在的“边”、“面积”。

第一种说法的解释是，这段话说圆面积是 $314+4/25=314.16$，由此得到 $\pi=314.16/100=3.1416$，这里 100 是半径 10 的平方。第二种解释是由于刘徽在求 157/50 的时候，已经算出半径为 10 寸、面积为 S 的圆内接正 192 边形的面积 $S_{192}=314+4/625$ 寸^2，$S_{192}-S_{96}=105/625$ 寸^2，$S_{12}=300$ 寸^2，$S_6=150\sqrt{3}$ 寸$^2=259.8$ 寸^2，并估计 S 与 S_{192} 大致相等，即 $S=314.1$ 寸^2，因而得到 $(S-S_{12}):(S_{12}-S_6)=(314.1-300):(300-259.8)=0.3507$。

又设 $(S-S_{192}):(S_{192}-S_{96})=(S-S_{12}):(S_{12}-S_6)$，这就有 $S=S_{192}+(S_{192}-S_{96})(S-S_{12}):(S_{12}-S_6)$。将前面各个数据代入这个式子，就能算得 $\pi=3927/1250$。这样，不但注释了刘徽的“以十二觚之幂为率，消息”一语，而且得到了他算得 3927/1250 的方法——“以十二觚之幂为率”。

但是，刘徽这个假设得到的结果是否可靠，是大有问题的。因此他不嫌繁琐，再仔细推算到圆内接正 1536 与 3072 边

形的面积，这时他应该得到 S_{1536} = 314.1584 寸^2 和 S_{3072} = 314.1591 寸^2；因而得出 3.141 591<π<3.145 98，准确到小数点后四位就得到 π = 3.1416=3927/1520。所以他说“得三千七十二觚幂而裁其微分，数亦然，重其验耳”。

然而，这种说法也值得商榷。首先，上述解释中的 S 一会儿是 314.1 寸^2，一会儿又是 314 + 4/25 即 314.16 寸^2，是矛盾的。其次，假设 S 为 314.1 寸^2 不合理，因为显然 S 应比 S_{192}大，而上面的数据是 $S < S_{192}$。再次，设（$S - S_{192}$）：（$S_{192} - S_{96}$）=（$S - S_{12}$）：（$S_{12} - S_6$），显然会有很大的误差。由互相矛盾的参数，不合理的假设和误差很大的算式要想得到准确到小数点后 4 位的 π 值，是不可想像的。如果得到了，那真是巧合。

说祖冲之算得 3927/1250 的方法，也有两种说法：他在计算他的 24 576 边形过程中把 3.1416 拣出来，或由 3.141 59 四舍五入到 3.1416 之后化为分数而来。

11.6 祖冲之是如何得到密率的

祖冲之得到密率的时候，并没有近代数学的符号运算系统及逻辑体系，更谈不上现代数学的逼近理论。所以他得到密率即祖率 355/113 的方法众说纷纭，至少有 6 种说法。

一说是，得自不定方程或求一术。假设祖冲之已经知道 π <3.1416=3927/1520，设 x、y 为整数且 x/y<3927/1520，便得到 1250x<3927y，再设 3927y = 1250x + 1，解这个不定方程，就得到第一组解：x = 355，y=113。于是就有 x/y = 355/113。

二说是，得自“调日法”——或称“加权加成法”。祖冲之得到 $\pi>3.1415926$ 之后，要改用分数表达。把 22/7 和 157/50 分别确定为强、弱二率，再用调日法 9 次，就得到 $(157+22\cdot9)/(50+7\cdot9)=355/113$。而 $355/113=3.1415929\cdots$，与 3.141 592 6 很接近，于是取 355/113 为“密率”。也可以用 157/50 和 22/7 分别作弱、强率，累次用调日法得到 $(157x+22y)/(50x+7y)=3.1415926$。解得 $y/x=8.996$，取 $y=9$，$x=1$，就得到 355/113。这就免得每次“调”后都要作误差核算，才能确定要否继续“调”下去，即可以“一次到位”。宋代沈括在名著《梦溪笔谈》中暗示祖冲之的结果与历法有关，也是此说的一个佐证。

三说是，得自连分数法。早年吕子方教授曾著《三统历历意及其数源》，认为汉代已经有连分数了。1951 年 8 月 19 日，华罗庚在中国数学会第一次全国代表大会闭幕词中也认为，汉三统历纯以实测为根据，其推算方法完全采用连分数，以求得接近的数值，与三统历所用的数字完全吻合。此外，22/7，355/113 又恰好是华罗庚所说“圆周率前面的六个‘最佳渐近分数’”中较前的两个。因此祖冲之完全有可能用这种方法求得 22/7 和 355/113。另一种推测认为，$3927/1520=[3,7,16,11]$，略去最后一项近似值，就得到 $\pi=[3,7,16]=355/113$。

四说是，得自“无穷级数法”，见《数学家辞典》的 868 页。

五和六说是，得自“平均值法”和“折中法”。例如，《数学历史典故》247 页说：“下面再谈谈密率的来源。……先看西方，安托尼兹先用阿基米德的方法求出 $333/106<\pi<377/120$，然后取二者分子、分母的平均值，得到 355/113。……而

奥托则也许是将阿基米德的圆周率 22/7 和托勒密的 377/120 折中而得 (377 − 22) / (120 − 7) = 355/113。”既然西方人可以用这些方法，那祖冲之又为什么不可能用呢？

第七说来自阿基米德的成果，1920 年，意大利数学家洛利亚（1862～1953 或 1954）发表了《中国人对数学的贡献》一文，认为阿基米德得到过 195 882/62 351 < π < 211 872/67 441 的成果，洛利亚把它写成连分数的形式：

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16-\cfrac{1}{31+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9}}}}}<\pi<3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{60}}}}}$$

由此得近似分数值 π = 3 + 1/ (7 + 1/16) = 355/113。但他的说法值得怀疑。

11.7 《缀术》和它的失传之谜

祖冲之父子博大精深的巨著《缀术》，被唐初列为“十部算经”之一，在各算术教科书中学习时间最长（4 年），在朝鲜和日本等国也作过课文。但它竟在流传五六百年后，大约在北宋天圣（1023～1031）至元丰（1078～1085）年间失传了！这是《缀术》失传年代的第一种说法。其例证之一是，元丰七年即 1084 年所刻“算经”中就没有《缀术》了。

在 2000 年涞水县的“纪念祖冲之逝世 1500 周年学术讨论会”上，郭书春在论文《是〈缀术〉“全错不通”，还是王孝通“莫能究其深奥”?》中，提出《缀术》失传年代的第二种说法：很可能不是在宋初而是在唐初之后的安史之乱的时候。理由

是，唐朝最著名的两个数学家之一、唐初为历算博士并任太史丞的王孝通（约7世纪）认为，《缀术》“全错不通”，加之当时没有印刷术，只有几个手抄本，所以被冷落；再加安史之乱之后，又有唐末战乱和五代十国纷争，是流传不到宋初的。

既然《缀术》已失传，当然它的详尽内容也无法知晓，那现代人又怎样知道确有此书和书中有上述内容呢？

原来，有许多史书谈到《缀术》和它的部分内容。除《隋书》外，李淳风等在注《九章算术》的时候，引用祖冲之父子在《缀术》中对球体积的研究成果时说，“攈摭诸家，考其是非，冲之为密，故显于徽术之后”，也证明《缀术》和上述内容的确存在。此外，《南齐书》祖冲之传和《南史》文学传中都说祖冲之“注九章，造缀述数十篇”（注意，这里是“缀述”）。而王孝通约626年以后上《缉古算术》表中说，“祖暅之《缀术》，时人称之精妙”。《隋书·经籍志》记录了“缀术六卷”，没有作者姓名。《旧唐书·经籍志》则记录“缀术五卷，祖冲之撰”。根据上面的史料，有以下初步意见。

祖冲之钻研了《九章算术》的刘徽注后，认为数学还应该再发展，于是他写了数十篇论文，附缀在刘徽注的后面，称它为“缀述”，也就是他的九章算术注。由于他在33岁以前对圆周率和球体积已经有过深入的研究，所以这方面的内容无疑是“缀述”的重要部分。而祖暅子承父业，也擅长数学，写成《缀术》六卷（或五卷）。父子二人都是该书的作者。《缀术》和《九章算术》等传统中国数学书一样，是一部数学问题集，包括父子二人精心制作的、问题和解法都比较深奥的内容，以致唐朝学数学的学生要花四年来研究它。

《缀术》失传不但造成了祖冲之算 π 的具体方法无从知晓，

也使其他内容被埋没，这是数学界的重大损失。但同时也引出一个问题：为什么比它更早的文献——例如欧几里得的《几何原本》，却流传到今天呢？这耐人寻味——擦亮这面历史之镜会照亮未来。

《缀术》失传，还引出一些趣事。梁宗巨在引用《隋书》中关于祖冲之的圆周率那段文字之后说："这 179 字的记载，是确凿无疑的。可是耶稣会神父赫师慎（L. van Hée）竟怀疑这段文字是明末西方数学传入中国后伪造的。其实现存的《百衲本二十四史》的《隋书》是影印元大德丙午（1306）年的刻本，那时西方人根本不知道这样精确的圆周率。宋李籍作《九章算术音义》，也引了祖冲之的圆周率，文字和《隋书》一样。又宋王应麟（1223～1296）《玉海》44 卷也引用了同样的文字。这些都在明末之前好几百年，可见赫师慎之说纯属无稽之谈"。此外，北周武帝保定元（561）年玉斗也以 3.141 592 6 入算。当然，祖冲之的成就领先达千年，后人又没有《缀术》原件，因此，对上述文献一无所知的赫师慎的谬论，也情有可原。

对于失传的《缀术》，李约瑟说："关于这部失传的著作，还有一些没有揭开的谜。"还说："我们甚至不知道《缀术》这个书名的确切意义。"由于《缀术》已经失传，所以祖冲之如何取得他算 π 的三项成就，便成了一些谜。

11.8 盈朒二限是如何得到的

梅文鼎、李俨、钱宝琮等认为，祖冲之的盈朒二限来自"割圆术"。他们还认为，祖冲之的步骤大致与刘徽算法相同，即设圆半径为 1 丈，化为 1 亿微，并将刘徽算到圆的 96 边形

推进到1536边形，得到3.1416，进一步求得圆内接正$6\cdot2^{11}$即12 288边形的面积$S_n=3.141\ 592\ 51$，和$6\cdot2^{12}$即24 576边形的面积$S_{2n}=3.141\ 592\ 61$，面积差$S_{2n}-S_n=0.000\ 000\ 10$，再用$S_{2n}<\pi<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$，得到$3.141\ 592\ 61<\pi<3.141\ 592\ 71$。最后删去末位不可靠的1，就得$3.141\ 592\ 6<\pi<3.141\ 592\ 7$。这正好是盈朒二限。

此外，2003年7月4日，郭书春在中央电视台第10套节目中也认为，从符合中国数学传统的角度来看，祖冲之的盈朒二限也来自和刘徽类似的“割圆术”。

不过，查有梁（1942～　）认为，上述解释有四点困难。他说，祖冲之是用“缀术”逼近法求π的。“缀术”乃“补缀之术”、“逼近之术”。应用刘徽的“割圆术”，可求出一系列单位圆中的内接正多边形S_{2n}——但总有一组弓形的面积没有“补缀”上去。他的观点是：祖冲之将“刘徽不等式”$S_{2n}<\pi<S_{2n}+\Delta S$的方法，发展为“祖冲之不等式”$S_{2n}+\alpha\Delta S<\pi<S_{2n}+\beta\Delta S$的方法，只需求出圆的正内接3072边形，就可以求得盈朒二限。对此有进一步兴趣的读者，可看他的《世界杰出天文学家落下闳》等著作。

“祖冲之不等式”还有另外的说法。2000年第3期《数学通报》刊登了虞琪《祖冲之是如何算π的》论文。论文认为：学官对祖冲之的算π方法不能理解，加之吴文俊（1919～　）在《吴文俊论数学机械化》一书206页中说“得到这个结果的方法可能非常重要，但是它现在失传了”。以上两事表明，祖冲之有自己独特的算π方法，可能就是改进了的刘徽不等式——“祖冲之不等式”。

另外，有人也认为，祖冲之并没有真正算到24 576边形，

也可能得到盈朒二限——关孝和就曾利用“增约术”，在不用那么多边数的计算中得到相同的准确度。如果祖冲之的确割圆到24 576边形的话。那么，用简陋的算筹进行成千上万次四则及乘方、开方运算，要“用惊人的毅力和勇气”、“严谨细致的作风”、花“15年时间”，便不足为奇了。

《隋书》记载祖冲之的结果时，有丈、尺、寸、分、厘、毫、秒、忽这些长度单位，也是他算盈朒二限是用割圆术的佐证。因为用其他方法就不会或难以得出有单位的结果。

此外，盈朒二限暗合刘徽不等式，这也是祖冲之求盈朒二限用割圆术法的又一佐证。

11.9 π有十进制的并行计算公式吗

在5.5的6.（2）和5.7中，谈到计算π任意位上的2和16进制数字的公式。这是“计算π的单个数字”的公式。但遗憾的是，数学家们至今没有找到类似的十进制数字的公式。

如果某人用计算单个数字的方法从π的第1亿位开始，第二人从第2亿位开始，……大家“并肩作战”算π，这就是π的“并行算法”。显然并行算法的本质是“计算单个数字”，它能让许多人分别用不同的电脑各自同时独立计算不同位数上的π值，然后把它们“合成”为“完整”的π值，也便于只关注后面的位数。可极大地提高效率、节约时间。

找到计算单个数字或并行算法的意义还是对计算方法的研究。

现在的问题是，人们虽然找到计算例如log（9/10）这些数学常数单个数字的10进制数字的公式，但却没有找到计算

π 的 10 进制单个数字类似的公式。不但如此，现在人们还没能证明，这种能计算 π 的 10 进制单个数字的模式究竟存不存在？不过，这个问题目前正在积极研究着。研究的成果之一是，根据用 5.8 提到的“PSLQ”进行的一些数值研究表明，似乎不存在 10 进制的计算 π 单个数字的简单公式。

因此，又一个未解之谜是：有没有计算 π 的 10 进制数字的并行计算（计算单个数字）公式？如果有，那又是什么样子的公式呢？

◎第十二章

反伪打假无尽期——谈圆算 π 也要讲科学

大自然把人们困在黑暗之中，迫使他们永远向往光明。

——歌德

12.1 π 是有理数吗——伯熙瓦自摆“乌龙”

1999 年 1 月 17 日，中国某报未加按语刊登了《圆周率 π 可以除尽》的摘自其他报刊的文章，要点如下：“1998 年 6 月，刚刚高中毕业，年仅 17 岁的加拿大少年伯熙瓦，在因特网上，动用电子邮件与世界上 25 台电脑连接，以二进位算法，计算出圆周除以直径的圆周率第 5 兆位的小数是零。如果按照十进位算法，则第 1 兆 2 千 5 百亿位数是零，也就是说，圆周率是可以除尽的有理数。”“1997 年 9 月，法国人贝拉尔曾创下了把圆周率计算到第 1 兆位小数的世界纪录，伯熙瓦不但打破了这个纪录，而且也打破了圆周率是除不尽的无理数的‘真理’”。

此前的 1998～1999 年，互联网和许多报刊上也有大同小异的报道。例如，在 1998 年 8 月 30 日，《自由时报》就登载了一则发自渥太华的新闻，说圆周率“永远除不尽”的神话，已经被加拿大一个年仅 17 岁的天才少年伯熙瓦打破了，理由是：“他利用二进位算法，发现圆周率的第五兆位小数值就是零。”

这些说法正确吗？

首先，“二进制的 5 兆位就是十进制的 1 兆 2 千 5 百亿位”显然是错误的。因为对同一数值用二进制表示的位数比用十进制表示的位数不可能更少。例如，用二进制表示“17”要用 5 位，即“10 001”；而用十进制表示则只用 2 位。

其次，π 值中某一位是零并不能证明 π 是有理数。事实上，π 的第 32 位小数就是零——不用到“第 5 兆位”去找。

“刘郎已恨蓬山远，更隔蓬山一万重。”由上可见，伯熙瓦的错误实在太大了。

根据《科技日报》1998 年 9 月 4 日《加拿大少年言称除尽圆周率，中国数学家视为无稽之谈》报道，中国科学院数学研究所陆柱家研究员和北京大学潘承彪教授，也表示了类似的看法。陆柱家认为，加拿大“天才少年”的“惊人发现”，要么是计算机的软件有问题，要么是硬件有误，否则不会有这个“令人瞠目结舌的结果”。

对此，《百科知识》1999 年 5 期 50 页称：“有报道说，一位年轻的美国大学生利用计算机将 π 计算到上亿位后发现，π 竟然是一个循环小数”。但这“是不可能的”。

后来，伯熙瓦发现媒体报道错误，便予以澄清说明——说自己踢进一个“乌龙球”。而《自由时报》也跟着在同年 11 月

11日登载新闻电文。这样，一场国内外各种新闻媒体因为“数学无知”而演出的闹剧，终于曲终人散，“飞鸟各投林”，落得个“白茫茫大地真干净”。

然而，这场闹剧却给我们许多思考。例如，为什么不少人并不能识别这些并不深奥的常识性的错误？为什么这类题材会引起轰动？有没有恶意的商业炒作？

12.2 只有前6位相同——一个西部农民能完成“革命”吗

因为“数学无知”的闹剧，4年之后演绎了“中国大西北版”。

2002年10月22日，中国西部某报在《农民挑战祖冲之》一文中报道：只有小学文化程度的农民汤晓（——本书作者改的代名），以超乎寻常的毅力和惊人的意志，倾其50余年心血，将圆周率推算到小数点后17位数——3.141 594 323 489 432 03。他不仅“改变”了祖冲之圆周率3.141 592 6中的后两位，同时又在他的基础上增添了11位。“省城”有关人士及数学界的权威曾数次对这一研究结果进行研讨，但至今尚未定论。一个具有挑战性的问题是，自祖冲之后，尤其是国外数学界采取多种计算方式和思路对圆周率的计算已达到上千亿位，但所有的结果其前8位数和祖冲之的相同。这意味着，倘若这个研究成果成立，那么包括祖冲之在内的所有对圆周率的探索成果是否将面临一次“革命”。

那么，汤晓的17位小数π值正确吗？某报的那篇文章的作者质疑的“革命”有可能到来吗？

我们不知道“省城有关人士及数学界的权威”的“定论”在过去了两年多之后做出来没有，但不必了解或需要这种“定论”，也不必亲自检验汤晓的计算。因为我们可以立即做出正确的判断：汤晓的 18 位 π 值只有前 6 位即 3.141 59 正确，后面的数字全部是错的；而且，他的方法或计算中至少有部分错误。

“上帝忘了给我翅膀，我却用科学飞翔。”我们有了科学这个翅膀，就能在 π 的天空“飞翔”：在 1.1 中，我们证明了任何圆的周长和直径的比 π 都是同一个值，它的前 18 位是唯一的——3.141 592 653 589 793 23；逻辑学中的规律不允许汤晓的 18 位 π 值充当“第三者”。

媒体的“数学无知”，是前面媒体报道伯熙瓦“乌龙球”的“克隆版”的主要原因。而这次某报质疑的“革命”，只不过是永远的水月镜花。

12.3 法律决定 π 值——不该发生的“笑话”

π 难道还与法律有关吗？如果有，这真是新鲜事。

美国医学博士埃德温·古德曼（Edwin J.Gooldman）——原来是印第安纳州“荒凉镇”的一位乡村医生。他声称，“超自然力量教给他一种计算圆周率的最好方法”，所以“顺利解决了过去 100 多年里最优秀的人才绞尽脑汁也无法解决的问题”，由于“上帝亲自传授圆周率的计算方法，这正印证了圣经的预言”。于是，古德曼就在 1888 年，也就是在“化圆为方”被德国数学家林德曼证明为不可能的 6 年后，向这个州的众议院介绍了一个“新的数学真理”。并把这一“真理”发表

在美国数学学会的官方刊物《美国数学月刊》（The American Mathematical Monthly）上。他说，由于这个发现，这个州将会从王国那里得到好处——使印第安纳州得到富裕。

古德曼提的议案的第二部分有下列内容：发现第四个重要事实，即直径和圆周之比等于 5/4 与 4 之比。容易算出他的“数学真理”是 $\pi = 3.2$。不可思议的是，经过他长达 9 年的游说，1897 年 1 月 18 日该州下议会议员雷科德（Taylor Record），将“修改圆周率为 3.2”提议为第 246 号法案。当然，这个法案可能出自古德曼之手，因为雷科德后来说，他根本就不知道法案的内容。

古德曼的议案被莫名其妙地交给运河委员会审查，接着又被交给沼泽地委员会。不久，沼泽地委员会又将法案交给教育委员会。不到一个星期，教委会便送回法案，并建议通过。

古德曼的议案里充满了难懂的数学术语，把每天要处理堆积如山的法案的众议院议员们搞懵了，没有任何一位州议员知道该法案的数学内容是怎么一回事。

1897 年 2 月 5 日，该州众议院于以 67 比 0 的“比分”，毫无异议地一致通过了这个编号为 246 号的议案，然后递交给参议院的一个委员会通过生效。法案竟然附带保证说，古德曼的计算结果 3.2——化圆为方的结果是正确的，因为它还得到美国数学界最权威的期刊之一——《美国数学月刊》的认可。

但可悲的是，这个法案并没有说明该月刊编辑曾指出，这是“应作者本人的要求”才发表的。月刊的处理态度也许并不令人意外，因为当时该州公共教育局长（教育督学）奋力支持，非常热衷极力促成该法案的通过。加之也可能该期正好剩有版面，或者还有古德曼的死缠烂磨。但不管真相怎样，可以

肯定的是，月刊并不同意他的观点。

如果这个法案最后被通过，将允许该州任何人有权无偿地使用古德曼的“发现”，至于其他州使用，那就必须“掏腰包”了。

真是“无巧不成书”。法案通过当天，普渡大学（Purdue University）的数学教授瓦尔多（C.A.Waldo），正好因为忙别的事造访委员会，看到了讨论的过程。他立刻拜会州议会，就此事提出质疑，在最后几分钟进行干涉。他后来写道，他当天婉言拒绝和这位“博学之士”古德曼会面，因为“他认识的疯子已经够多了”。

严重的官僚主义使这一议案在“公文旅行”中，被误送到戒酒委员会，拖了好几天。一些报纸也对这件事进行嘲笑。例如，投票的第二天，当地的地方报纸《印第安纳波里斯日报》就披露了这个消息，并评论说这是有史以来印第安纳州议会所通过的最奇怪的法案。如果不是这些“阴差阳错”，这个议案就成为法律了。

最后，州的上议会终于在1897年2月12日投票，被迫做出无限期搁置讨论的决议，至今仍未“解冻”。

12.4 “π跟石头一起走，说好不回头”——金字塔前的神话

由于金字塔大名鼎鼎，自然对它的话题就会长盛不衰。加之它确有一些至今未解之谜，于是一些人便趁机将它吹得神乎其神，编造了诸如它是由外星人所建造的这类神话。而有关位于埃及的吉萨（Gizeh或Giza）的胡（库）夫（Khufu）金字

塔即歧奥普斯（Cheops）金字塔、斯勒费努（Sneferu）金字塔，或其他金字塔的神话就不胫而走了。

最古老的神话之一是，埃及金字塔底边长和高度之比是 11:7（约 π/2），那么底边周长之半与高之比就是 π 值。这最早是阿格纽（H.C.Agnew）于 1853 年在伦敦公开的一封信。这封由他写自埃及亚历山大的信认为，斯勒费努和胡夫这两座金字塔的底边长与高之比，是 11:7，由此就知道塔底周长与塔高二倍之比为 22/7，而这正好是 π 的近似值。

胡夫金字塔高 146.5（另说 146.59，146.6）米，塔底正方形每边长 233（另说 230，230.6，232）米。我们先算 (233·4) / (146.5·2) = 3.18。可见，这并不是 π 的近似值 3.14。如果改用括号中的数据计算，同样也得不到 3.14。因此，阿格纽的说法便显得牵强附会了。如果说，有一座金字塔的某些参数经过一定运算后与 π 值接近，这是可能的。但这是一种巧合，绝无神秘可言。这种巧合在许多场合都不难找到。例如，有一座高 16 层的楼房，每层某单个房间的面积为 15 米^2，层高为 2.95 米。那么，我们就说房子总高与每个房间面积之比 (2.95·16/15 = 3.14···) 就是近似 π 值。你说这有什么神秘吗？

由此看来，倒是古希腊数学家希罗多德（公元前 484～前 425）的记载比较能说明这种巧合：以金字塔的高度做某正方形的边长，这个正方形的面积恰好等于金字塔每个侧面的面积。只要是根据这样的结构建造的金字塔，它的边长和高度的比值都会接近 π/2。

然而令人遗憾的是，这种神话和生拼硬凑在崇尚科技、破除迷信的当今世界，似有愈演愈烈、乐此不疲之势。不信，请看本书最近 15 年里收集到的报刊和书上的下述 13 则内容——

被大致分为两类：

（1）其中有 6 则内容说，"胡夫大金字塔……塔高的两倍，除以塔底的面积等于3.141 59…，恰好与圆周率数字相同。"而它们给出的胡夫大金字塔的参数是"塔底每边长 230 米，塔高 146.6 米"。由这些参数可以算得塔高两倍除以塔底面积是：$146.6 \cdot 2/230^2 = 0.005\cdots$。但这与 π 值相去天渊，可见其前后矛盾。

（2）另外有 7 则内容则说，胡夫金字塔高 146.5 米，塔底每边长 230.6 米，并有"公式：（金字塔）底周长/（塔高·2）= 圆周率（π = 3.14）"。但是，我们按公式算下来却是 $(230.6 \cdot 4) / (146.5 \cdot 2) = 3.148\cdots = 3.15$。可见其前后并不吻合。

此外，还有一个资料说，人们为查明金字塔和行星之间对应关系而进行准确的体积比较时，偶然发现了一个意想不到的数值，那就是计算球体的体积时使用的 4π/3。当用金字塔的体积乘以 4π/3 的时候，就会出现与行星的值准确对应的结果来。

总而言之，现代媒体对金字塔和 π 之间有着神秘的关系持肯定态度，并乐此不疲地做说法不尽一致或自相矛盾的宣传。然而，中国数学史家梁宗巨指出，"这纯属生硬凑合，因为金字塔底与高并没有固定的比"，如果上述比值接近 π 值，纯系巧合。

不过，生硬凑合的源头却不是更早的阿格纽——他没有掀起狂风巨澜，而是迟于他的瑞士人厄里希·冯·丹尼肯于 1968 年出版的《众神之车》。这本书的第七章写道："这座金字塔的底面积除以两倍塔高，刚好是著名的圆周率 π = 3.141 59,

这难道是巧合吗?”

丹尼肯的说法对吗?我们不妨以他的方法,用塔高146.5m和塔底边长230.5米来算一算:$230.5^2/146.5\cdot2=181.331\cdots$。看,并没有得到他所说的3.141 59!真是“神才知道他是怎么算出来的。”

不过,把这种谬误完全归罪于丹尼肯也不公正,因为他是从100年前的“圣经金字塔学”中抄来的,只不过他抄也没有抄对。那么,“圣经金字塔学”是怎么回事呢?

1864年,英国人泰勒出版了一本名为《大金字塔为何而建和谁建的》书,宣称大金字塔是《圣经》中建造“方舟”的诺亚在圣谕下建造的,而π之谜正是圣迹的表现。同年,爱丁堡大学天文学家史密斯教授也出版了名为《我们从大金字塔中获得的遗产》一书,牵强附会地列举了金字塔更多的数学和天文“奇迹”。他甚至在大金字塔中测出了耶稣将于1911年第二次降生人间。

以上就是所谓“圣经金字塔学”,莫非是要人们“尊崇一天主于万有之上”而已。一个世纪过去了,“圣经金字塔学”早已破产,耶稣也没有“再次降世”,但金字塔的神话流行依然。现在,是用科学终结这些神话的时候了。

丹尼肯的《众神之车》说,上帝是从外星飞来的宇航员们的领袖,率领众神即宇航员们一起在地球上创造了人类和人类文明。这一“创见”立刻在西方世界引起了轰动。他的书也接二连三地写了8本以上,在32个国家里销了4000万册,至少有5亿人知道他的“创见”。在中国,丹尼肯的书和有关电影也同样产生了不小的影响。像当时联邦德国和意大利合拍的彩色片《向往未来》中就有丹尼肯的邪说。在我国放映时,发生

过这样一件事：某地一次学生暑假作文竞赛中，得奖作品有一篇就名为《天外来客＝上帝》，而作者的年龄仅仅13岁。由此可见，丹尼肯的邪说对中国青少年的不良影响是多么惊人！

把简单的事物复杂化，把巧合的事物规律化，进而将它们云遮雾障，披上“科学”的面纱。有的是探索中的失误，有的是存心骗人。在崇尚科技、破除迷信的今天，仍有不少人对此“情有独钟”，于是骗人和被骗便不可避免了。

12.5 美缘为何“终虚话”——倒霉的不仅是“白马王子”

一个是阆苑仙葩，
一个是美玉无瑕。
若说没奇缘，
今生偏又遇着他；
若说有奇缘，
如何心事终虚话？

在《红楼梦》第五回中，有一首描写林黛玉（阆苑仙葩）和贾宝玉（美玉无瑕）爱情的《枉凝眉》，这是其中的前半段。

下面也有一个“《枉凝眉》”——外国古代“爱情版”的。

“化圆为方”问题受到人们的广泛关注，一直持续到十七八世纪。例如，1686年3月4日出版的《博览》杂志曾经报道过这样一则消息：“一位女士断然拒绝了一名条件很好的先生的求婚。原因很简单，因为他在给定的时间内，始终无法对化圆为方的问题提出新的见解。”

这位“白马王子”也太倒霉了——“生不逢时”。

这位“白雪公主”的要求也“太高”了，当时谁能解决化圆为方问题呢?

我们不知道这位“白雪公主”最终是否如愿以偿，找到“对化圆为方的问题提出新的见解”的“好条件先生”，并喜结连理。不过，我们知道，这种“好条件先生”要大约两个世纪后才有——1882年证明π是超越数的德国数学家林德曼，就是众多“好条件先生”中的一位超级“白马王子”!

可见，倒霉的并不仅仅是那位“白马王子”，还有这位“白雪公主”。因为她肯定也是“心事终虚话”——像那《枉凝眉》接着唱的：

一个枉自嗟呀，
一个空劳牵挂。
一个是水中月，
一个是镜中花。
想眼中能有多少泪珠儿，
怎禁得秋流到冬，
春流到夏!

这“可恶”的化圆为方啊，你“破坏”了一段美好的姻缘!

不过，这一切的“罪魁祸首”，却是这位“白雪公主”的“无知”。她不明白“科学是不能计划的”。

“无知”的举动虽然不能归划在伪科学之列，但这位“白雪公主”的要求的“现代版”，却有伪科学之嫌：20世纪下半叶，不是有一个超级大国拨巨款雄心勃勃地要在多少年之前宣布攻克癌症吗?结果怎样?以宣布失败而告终。于是我们只好再次说，“科学是不能计划的”——谁要是为科学制定“计

划”，这个举动本身就是伪科学。

12.6 从第十行星到π值——无须“神化”八卦

有资料说，祖冲之是“依据八卦无限等分的原理，将八卦无限尽地等分下去，则得：周长/直径＝π”的。

由于本书作者孤陋寡闻，没有看到这种说法的具体依据。但是，却联想起另外一件关于用八卦推算出“第十大行星”的故事。

从20世纪80年代开始，就有不少报刊载文说，出生在成都市龙泉驿区洛带镇的学者刘子华（1899～1992）老早就预测了“第十大行星”的存在。依据是，他在巴黎留学时写了3年的、简称《一颗新星球的预测》的论文，在1940年11月被巴黎大学的论文答辩会通过，他也因此获得法国国家博士学位。在这篇论文中，他用八卦推算出这颗行星的运行速度(2千米/秒)、密度（424千克/米^3）、距离太阳的平均距离（$7.4\cdot10^9$千米），并命名为“木王星”。

而大约在20年后，西方在1959年才有这颗星可能存在的论文。

这个故事一直讲到21世纪的今天——本书作者手中有最近20年近10份不同的报、刊、书的这种报道。

“智慧没有童年。”古代中国的《易经》、八卦当然是穿越几千年而至今光芒万丈的伟大成果，在诸如二进制数学、矩阵等方面都有广泛应用。但是，八卦并不是天文学或自然科学，也不可能用它推算出新的行星。

事实上，从在重庆的1945年11月26日出版的《新华日

报》的文章，到1983年第5期《科普创作》重新发表（原发表在1945年）的一位中国天文学家的文章，到2001年印的另一位中国天文学家的《第十大行星之谜》，都认为凭借阴阳八卦是不可能推算出新行星的。

类似，根据π值的计算规律，我们也不无理由地说，凭借八卦，祖冲之是不可能推算出“周长/直径 =π”的。

科学需要反伪打假。

◎第十三章

附录——丰富资料供你查询

人们不必在害怕中从任务面前退却。

——爱因斯坦

13.1 π值大全表（表13-1）

表13-1

序号	π值	年代	计算，使用者或来源	误差，方法，机型，用时等
1	2.12	1995.7.26	布莱泽	
2	2.17	1995.7.26	布莱泽	
3	2.828 427 1…	11世纪	普塞洛斯	
4	2.914 213 514 815 11+	20世纪80年代	杜德利	
5	3	古代	《圣经》，中国，希腊，埃及，巴比仑等	相对误差4.507%
6	3.0033=(1826-)/(608-)	古代	中国《宋书·卷十三·天文志》	相对误差4.402 %
7	3.0044	古代	印度《绳法经》	
8	3.0375	850	印度马哈维拉	

续表

序号	π 值	年代	计算，使用者或来源	误差，方法，机型，用时等
9	3.0476=3+1/21	古代	中国临川纪氏	
10	3.0588	17 世纪	中国方以智	
11	3.0625=49/16	530，1982.10	印度包德哈耶那，叫V.J. 的人	
12	3.0883	古代	印度《绳法经》	
13	3.12	古代 1995.7.26	古罗马人，马兹	
14	3.121 303 4(?)	16 世纪	中国邢云路	
15	3.121 320 34(?)	16 世纪	中国邢云路	
16	3.1214	1995.7.26	伊东	
17	3.1250 或 3.125=25/8	古代及近代	古埃及，古罗马，中，法，英等	
18	3.126	16 世纪	中国邢云路	
19	$3.1362=3(\sqrt{3}+\sqrt{6})/4$	13～15 世纪，1464	欧洲人，德国德·库萨·尼古拉斯	
20	3.1378	1928	美国伦泽尔	化圆为方作图
21	223/71 < 3.14 < 22/7，22/7	公元前 3 世纪	古希腊阿基米德	古典割圆术
22	3.14=157/50	3 世纪	刘徽	刘徽割圆术
23	$3.1409=88/\sqrt{785}$	1580	丹麦第谷·布拉赫	
24	3.1414=3+14/99	1776	德国赫塞	
25	3.141 533…	1685	波兰科汉斯基	化圆为方作图
26	3.141 552(?)	2 世纪	古希腊托勒密	
27	3.141 584…	1879	美国查什	化圆为方作图
28	3.141 590 1 = 354.999 69/113	古代	中国《翠微山房算学》	
29	3.141 590 4 = 211 872/67 441(?)	2 世纪	古希腊托勒密	
30	3.141 591…	1828，1933	德国斯佩特，美国梅里尔	化圆为方作图
31	3.141 592 5 = 21.991 148/7	古代	中国《翠微山房算学》	

续表

序号	π值	年代	计算,使用者或来源	误差,方法,机型,用时等
32	3.141 592 652 582 …	1913	印度拉马努金	化圆为方作图,0.000%
33	3.141 592 650 00	1863	英国德拉克	
34	3.141 592 65	1710	中国梅文鼎	
35	3.141 592 6~3.141 592 7	480	中国祖冲之	
36	3.141 592 653	1579	法国韦达	韦达无穷乘积式
37	11位	16世纪,1700(?)	印度尼拉堪塔,日本关孝和	
38	15位	1676	英国牛顿	表6-1的(14)式
39	16(算到18)位	1593	荷兰-比利时范·罗曼	
40	16位	1596	荷兰-德国鲁道夫	古典割圆术
41	16位	1665,1712	英国牛顿,日本关孝和	表6-1的(1)式,关孝和的方法不详
42	17(算到18)位	1424(?)	阿拉伯阿尔·卡西	改进的古典割圆术
43	18位	1597	荷兰-比利时范·罗曼	
44	20位	1713或1723	中国《数理精蕴》	
45	21位	1596	荷兰-德国鲁道夫	古典割圆术
46	25(算到40)位	1722,19世纪	日本镰田俊清,中国朱鸿	
47	36位	1610	荷兰-德国鲁道夫	古典割圆术
48	40位	1630	意大利格林贝格	改进的割圆术算π终结
49	43位	1690或1727	日本建部贤弘	
50	51位	17~18世纪	日本关孝和,建部贤弘,松永良弼	增约术,圆理等
51	72位	1699(?)	英国夏普	表6-1的(8)式
52	101位	1706	英国马青	表6-2的(8)式

续表

序号	π值	年代	计算,使用者或来源	误差,方法,机型,用时等
53	113 (算到 128) 位	1719	法国德·拉尼	表 6-1 的(8)式
54	127 位	1789	奥地利乔治·威加	表 6-2 的(5),(6)式
55	137(算到 141) 位	1794	奥地利乔治·威加	
56	153(算到 154) 位	1837, 1841	卡勒特 (?),英国威廉·卢瑟福	?, 表 6-2 的(21)式
57	201(算到 206) 位	1844	德国达什, 斯特拉斯尼茨基	表 6-2 的(9)式
58	249(算到 251) 位	1847	丹麦(或德国)克劳森	表 6-2 的(5),(8)式
59	262 位	1853	雷曼(Lehmann)	
60	319 位	1851	英国威廉·山克斯	
61	331 位	1853 (1855 公布)	德国(?)黎赫特即(?)雷歇	
62	441 或 401 位	1853	英国威廉·卢瑟福	
63	501 位	1854	德国(?)黎赫特, 雷歇(?)	
64	528(算到 607)位	1853	英国威廉·山克斯	表 6-2 的(8)式
65	528(算到 708)位	1873	英国威廉·山克斯	表 6-2 的(8)式
66	541 位	1945	英国弗格森	
67	621 位	1946	英国弗格森	
68	711 位	1947.01	英国弗格森	
69	723(算到 809)位	1947.01	美国雷恩奇	
70	809 位	1949.09	美国雷恩奇及英国弗格森	各用表 6-2 的(8),(31)式
71	1121 或 1119 位	1949.06	美国雷恩奇及列维·史密斯	人工算π最高记录
72	2036 或 2038 (算到 2049)位	1949	美国冯·诺伊曼, 迈特罗伯里斯, 芮特威斯伦	计算机始算π, ENIAC, 表 6-2 的(8)式, 70 小时

续表

序号	π值	年代	计算,使用者或来源	误差,方法,机型,用时等
73	3090或3093位	1954	美国尼科尔森及杰勒尔	NORC,13分
74	7481位	1957	英国费尔通	PEGASUS
75	10 001位	1958.01.20	法国弗朗索瓦·吉努斯	IBM-704,100分
76	10 018 或 10 022位	1958.05	英国费尔通	PEGASUS,33小时
77	10 881	1961初	英国罗滨逊	13小时
78	16 168位	1959.07.20	法国吉努斯和吉劳德	IBM-704
79	20 001位	1959	英国人	IBM-7090
80	100 266位	1961.07.29	美国雷恩奇及丹尼尔·山克斯	IBM-7090,表6-2(27),(28)式,523和481分
81	105 001位	1974	日本人	HITAC-8800
82	250 001位	1966.02.22 或 25~26	法国吉劳德等	IBM-7030或STRETCH
83	500 001位	1967.02.25 ~26	法国吉劳德等	CDC-6600,28小时10分
84	1 000 251位	1973.05.24	法国吉劳德及玻叶等	CDC-7600,23小时 18 分,200或400页书
85	1 500 001位	约1977	美国科诺思即道纳德等	300页书
86	2 000 038位	1981.06.18~07.01	日本鹿角理三吉,久仲山,金田康正,三好和宪,中山和彦	FACOM-M-200, 137.30小时
87	2 000 051位	1982	法国吉劳德等	
88	2 097 145位	1982	日本田村芳昭	MELCOM-90011
89	4 194 289位	1982	日本田村芳昭及金田康正	6.8小时
90	8 388 577或~609位	1982	日本田村芳昭及金田康正	HITACHI-M-280H,6.8小时

续表

序号	π值	年代	计算,使用者或来源	误差,方法,机型,用时等
91	10 013 396 位	1983.10	日本金田康正和 Ushiro	HITACHI-S-810-20
92	16 777 217 位	1982	日本田村、金田和 Yoshino	HITACHI-M-280H, 24 小时
93	17 526 201 位	1985	美国哥斯佩尔	5.5 的 6.(2) 的拉马努金公式
94	29 360 112 或~001 位	1986.01	美国达维德·贝利	CLAY-2, 加拿大两位波尔文的算法, CRAY-2
95	33 554 415 位	1986.09	日本田村芳昭及金田康正	HITACHI-S-810-20
96	67 108 840 位	1986.10	日本田村芳昭及金田康正	
97	133 550 001 或 133 326 001 位	1987	日本金田康正,田村芳昭 Kubo 等	HITACHI-S-810-20, 35 小时 14 分
98	134 217 729 或~701 位	1987.01	日本金田康正 Kubo 等	NEC-SX-2, 5.5.6(1), "波尔文算法", 36 小时
99	201 326 552 或~001 位	1988.01.27	日本金田康正和田村芳昭	HITACHI-S-810-20
100	480 000 001 位	1989.05	美国丘德洛夫斯基兄弟	丘德洛夫斯基公式, CLAY-2, IBM-3090-VF
101	525 229 271 位	1989.06	美国丘德洛夫斯基兄弟	丘德洛夫斯基公式
102	536 870 899 或~001 位	1989.07	日本田村芳昭及金田康正	HITACHI-S-810-20, 67 小时 13 分
103	1 011 196 692 位	1989.08	美国丘德洛夫斯基兄弟	CLAY-2, IBM-3090-VF

续表

序号	π值	年代	计算,使用者或来源	误差,方法,机型,用时等
104	1 073 741 800 或~0001 位	1989.11	日本田村芳昭及金田康正	HITACHI -S-810-20, 74 小时 30 分
105	2 260 000 001 位	1991.08	美国丘德洛夫斯基兄弟	丘氏公式
106	3 221 225 467 位	1995.06	日本金田康正及高桥大介	HITACHI -S-3800-480
107	4 044 000 001 位	1994.05	美国丘德洛夫斯基兄弟	丘氏公式
108	4 294 967 287 位	1995.08 下旬	日本金田康正等	
109	4 290 000 001 位或 4 294 967 287 位	1995 约 9~10	加拿大乔纳森·波尔文及彼德·波尔文	56 小时
110	6 442 450 939 位	1995.10	加拿大两位波尔文或金田康正	
111	80 亿位	1996	美国丘德洛夫斯基兄弟	
112	51 539 600 001 位	1997.06-07	日本金田康正及高桥大介	66 小时
113	68 719 470 001 位	1999.04	日本金田康正及高桥大介	
114	206 158 430 001 (算到~208)位	1999.09.18	日本金田康正及高桥大介	HITACHI-SR-8000, 37 小时 21 分 4 秒
115	最新纪录 12 411 亿位	2002.11.24	日本金田康正和日立制作所员工	日立 SR-8000-MPP, 400 多小时, DRM 法
116	3.141 592 8	1699	日本三宅贤隆	
117	3.141 592 9… = 355/113	5 世纪,约千年后	祖冲之,安托尼兹,奥托	
118	3.141 592 920 35…	1914	英国胡格赫斯	化圆为方作图
119	3.141 594 269 = 20 612/6561	1851	帕克尔	
120	3.1416 = 3927/1250	3 或 5 世纪	刘徽或祖冲之	

续表

序号	π值	年代	计算,使用者或来源	误差,方法,机型,用时等
121	3.141 601 5 = 195 882/62 351	2世纪	古希腊托勒密	
122	3.141 605 5	1585	荷兰(?)伊克	
123	3.141 640…	1913	英国霍布森	化圆为方作图
124	3.141 661 368 32	1696	日本古郡解	
125	3.141 666 … = 377/120	150	古希腊托勒密	利用制作的弦表
126	3.141 75	10～11世纪	阿拉伯人阿尔·比鲁尼	
127	3.141 76		萨本	
128	3.1418	1220	意大利斐波那契	
129	3.1419	1894	英国福克斯	
130	3.142 000 0	1962	达特	3+(7.1/50)
131	3.142 135…	1868	美国格诺斯维纳	化圆为方作图
132	3.1423	1503	法国波耶勒斯	
133	3.1426=1521/484	1854	荷兰(?)伊克	
134	$3.1427=\sqrt{2}/0.45$	1610等	中国朱载堉	
135	3.1429=111 035/35 329	450	中国何承天	
136	3.142+	450	中国何承天	
137	3.143 43	1464	德国约翰·穆勒	
138	3.1466=730/232	2世纪	中国张衡	
139	3.152 05	17世纪	中国陈尽漠	
140	3.1525	17世纪	中国陈尽漠	
141	3.1547	1世纪	中国刘歆	
142	3.1553	1855	英国亨利·史密斯	
143	3.1555… = 142/45	3世纪	中国王蕃	
144	3.16	25及以后	中国刘向和日本人	
145	$3.1605=(4/3)^4$	古代	埃及兰德纸草书	
146	$3.1623=\sqrt{10}$	公元前6世纪起	印度耆那教经典,中国张衡等	

续表

序号	π值	年代	计算,使用者或来源	误差,方法,机型,用时等
147	3.1666…	1854	约翰·戴维斯	苹果是酸的,这就是证明
148	3.1724 = 92/29	2 世纪	中国张衡	
149	3.179 024 7	1 世纪	中国刘歆	
150	3.2	1666 等	英国霍布斯,日本人等	
151	3.202 216 066 = 3.202 216 + $(24/361)\cdot 10^{-7}$	1833	英国巴特勒	
152	3.24	11 世纪	比利时弗兰科	
153	3.3750	3 世纪	中国《九章算术·少广》	
154	3.4638	6 世纪	印度阿耶波多	
155	3.8642 = 313/81	公元前 20 世纪	埃及人	
156	3.8750 = 31/8	公元前 20 世纪	巴比仑人	相对误差 23.343%
157	4	1753	法国卡尤萨斯	相对误差 27.324%

说明:数值由小排到大,"~"表示省略前边相同的数字,5.6 和 5.7 中的近 20 种未收入

13.2 π的数表

π(八进位表示) = 3.110 375 524 210 264 3 …

$1/\pi =$ 0.318 309 886 183 791 …

$\pi^2 =$ 9.869 604 401 089 359 … = 1/0.101 321 183 642 338 …

$\sqrt{\pi} =$ 1.772 453 850 905 516 … = 1/0.564 189 583 547 756 …

$\sqrt{2\pi} =$ 2.506 628 274 631 001 … = 1/0.398 942 280 401 433 …

$\sqrt{\pi/2} =$ 1.253 314 137 315 500 … = 1/0.797 884 560 802 865 …

$\sqrt[3]{\pi} =$ 1.464 591 887 561 523 … = 1/0.682 784 063 255 296 …

$\log_{10}\pi =$ 0.497 149 872 694 134 …

$\log_e \pi = 1.144\ 729\ 885\ 849\ 400 \cdots$

π 的前 **1001** 位

3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 249 141 273 724 587 006 606 315 588 174 881 520 920 962 829 254 091 715 364 367 892 590 360 011 330 530 548 820 466 521 384 146 951 941 511 609 433 057 270 365 759 591 953 092 186 117 381 932 611 793 105 118 548 074 462 379 962 749 567 351 885 752 724 891 227 938 183 011 949 129 833 673 362 440 656 643 086 021 394 946 395 224 737 190 702 179 860 943 702 770 539 217 176 293 176 752 384 674 818 467 669 405 132 000 568 127 145 263 560 827 785 771 342 757 789 609 173 637 178 721 468 440 901 224 953 430 146 549 585 371 050 792 279 689 258 923 542 019 956 112 129 021 960 864 034 418 159 813 629 774 771 309 960 518 707 211 349 999 998 372 978 049 951 059 731 732 816 096 318 595 024 459 455 346 908 302 642 522 308 253 344 685 035 261 931 188 171 010 003 137 838 752 886 587 533 208 381 420 617 177 669 147 303 598 253 490 428 755 468 731 159 562 863 882 353 787 593 751 957 781 857 780 532 171 226 806 613 001 927 876 611 195 909 216 420 198 9…

π的前**10001**位：

[illegible]

13.3 人名索引

A

Alas，120

阿贝尔（Niels Henrik Abel，1802～1829）挪威数学家，196，225

阿波罗尼奥斯（Apollonius，或Apollonius of Perga；约前260～前190或170）又译佩尔吉的阿波罗尼奥斯或阿波罗尼乌斯，古希腊数学家，80，82，84，295

阿尔伯特（Albert of Saxony，1316～1390）萨克斯索尼的主教，80

阿格纽（H.C.Agnew，19世纪）英国学者，322，323

阿基米德（Archimedes，前287～前212）即亚儿默德，亚氏，阿氏，古希腊数学，物理学家，8，9，23，33，35，51，68，74～76，78～86，89～92，95，98，102，103，104，175，178，192，212，215，234，247，253，255，278，279，292，309，310，330

阿拉戈（Dominique François Jean Arago，1786～1853）法国天文学家，182，183，276

阿里斯托汉斯（Aristophanes，前448～前385）古希腊诗人，176

阿利亚巴塔（Aryabhatta，476～550?）即阿利亚布哈塔，阿耶波多，阿耶波多第一，圣使，印度数学家，12，58，92，206，213，271，306，337

阿利亚布哈塔见阿利亚巴塔

阿纳萨哥拉斯（Anaxagoras，前500或499～前428）古希腊数学家，175

阿佩尔（Paul-Emile Appell，1855～1930）法国数学家，228

阿契塔斯（Archytas of Taras，前428～前347或365）古希腊数学家，35

阿氏见阿基米德

阿西莫夫（Isaac Asimov，1920～1992）美籍苏联科普、科幻作家，120

阿耶波多第一见阿利亚巴塔

阿耶波多见阿利亚巴塔

埃尔米特(Charles Hermite, 1822～1901）法国数学家，39，40，203
艾哈麦斯（Ahmes，约前 20 世纪或前 16～17 世纪）古埃及祭司，司书，数学家，67，174
艾伦坡　诗人，251
艾略特（Thomas Stearns Eliot，1888～1965）出生在美国的英国诗人，272
艾儒略（Julius Aleni，1582～1649）意大利传教士，100
艾森罗尔（Eisenlohr，约 19 世纪）67
艾斯柯特（Escott）19～20 世纪数学家，167
艾特坎（Alexander Craig Aitken）现代英国教授，288，289
爱克，凡，西蒙，181
爱因斯坦（Albert Einstein，1879～1955）美籍德国物理学家，5，6，43，239，266，268，295，296，329
安岛直圆（Azima Naonobu，或 Ajima Chokuyen；1738 或 1739～1798）日本数学家，161，162，164
安德鲁——G. 安德鲁（20 世纪）美国现代数学家，162
安史（约 8 世纪）即安禄山（节度使）中国唐朝人，310，311
安提丰［Antiphon（或 Antiphon of Rhamnus），约前 480～前 411］古希腊数学家，79，175，178，278
安托尼兹见梅蒂尤斯（?）
奥尔登伯格（Henry Oldenburg，1615～1677）英国商人，科学家，110，112
奥尔曼（G.J.Allman）当代数学史家，191
奥特雷德（William Oughtred，1573 或 1574～1660）英国数学家，24
奥田有益（17～18 世纪）日本数学家，81
奥托［Walentin（或 Valentin，或 Valentine）Otho（或 Otto），约 1550～1605］荷兰数学家，15，17，94，310，335

B

巴尔扎克（Honoré de Balzac，1799～1850）法国作家，48
巴赫曼（Paul Gstav Henirich Bachmann，1837～1920）德国数学家，38
巴霍姆（虚构人物）257，258

巴杰——L. 巴杰（20 世纪）美国当代学者，141
巴罗，艾萨克［Isaac Barrow（或 Banow），1630～1677］英国数学家，25，36，111
巴罗，约翰（John Barrow）当代英国天文学家，23，266
巴拿赫（Stefan Banach，1892～1945）波兰数学家，193
巴宁－古德（W.S.Baring-Gould）诗人，54
巴斯卡拉二世见婆什迦罗
巴斯曼（Antranig Basman）284，289
巴特勒（William Baddeley）英国人，61，182，337
白进见白晋
白晋（Joachim Bouvet，1656～1730 或 1732）即白进，法国传教士，101，115
柏拉图［Platon（或 Plato），前 427～前 348 或 347］古希腊哲学家，数学家，34，35，186，291
邦贝利（Raphael Bombelli，约 1526～1572）意大利数学家，206，229
包德哈耶那［Baudhāyana（或 Baudhayana）约 6 世纪］印度数学家，61，330
鲍尔（G. N. Bauer，19～20 世纪）214
贝多芬（Ludwig van Beethoven，1770～1827）德国作曲家，47
贝尔（Eric Temple Bell，1883～1960）美国数学史家，83
贝格，冯，凯洛格见乔治·威加（?）
贝克（Alan Baker，1939～　）英国数学家，204
贝克曼，佩特（Peter Beckmann，20 世纪）美国籍捷克斯洛伐克当代科学家，数学史家，126，294
贝拉尔　法国人，316
贝利（Pelé，原名 Edson Arantes do Nascimento，1940～　）巴西球王，287
贝利，达维德（David H.Bailey，20 世纪），美国当代数学家，129，130，132，148，334
贝利，罗伯特（Robert Baillie）美国当代数学家，241
贝林（J.B.Perrin，1870～1942）也译佩兰，法国物理学家，239
贝伦，让（19～20 世纪）法国物理学家，259
贝纳德，法布里斯（Fabrice Bellard）当代数学家，148，149
本生（Lawrence Sluter Benson）美

国人，53
比贝尔巴赫（Ludwig Bieberbach，1886～1982）德国数学家，190
比鲁尼，阿尔（al Biruni，973～1038至1050）阿拉伯数学家，74，336
比特尔－比乌斯见维特鲁维厄斯（?）
彼德森——I. 彼德森（Ivars Peterson）当代数学家，281，289
彼德森——P. 彼德森（P.Pedersen，20世纪）当代数学家，121
毕达哥拉斯（Pythagoras，约前572至580～前497至500）古希腊数学家，33，35，185，187，231
比尔（W.A.Beyer）当代数学家，44
别莱利曼（Яков Исидорович Перельман，1882～1942）苏联教育家，科普作家，277
波尔巴赫［George（或Georg）von Peurbach（或Purbach），1423～1461］奥地利数学家，93
波尔塔，约翰，181
波尔文，彼德（Peter B.Borwein），加拿大当代数学家，44，49，128～130，132，136，148，149，334，335
波尔文，乔纳森（Jonathan M. Borwein）加拿大当代数学家，49，128～130，132，136，149，334，335
波莱尔［Félix-Édouard-Justin-Émile Borel（"简写"为Émile Borel），1871～1956］法国数学家，38，41，278
波利亚（George Pólya，1887～1985）美籍匈牙利数学家，174
波伦特，理查德（Richard Brent）当代数学家，126，127
波那契奥（Bonccio）意大利商人，税官，74
波瑞斯通（R.Preston）135
波托雷梅见托勒密
波耶勒斯（Charles Bouelles）法国数学家，73，179，336
玻叶（Bouyer）法国当代数学家，126，333
伯格伦（Len Berggren）加拿大当代数学家，49
伯里克利（Pericles，约前495～前429）古希腊政治家，175
伯努利——两个尼古拉·伯努利，分别见尼古拉第二和尼古拉第三条；约翰·伯努利，詹姆斯·伯努利见雅格布·伯努利

伯努利，雅格布（Jacob I.Bernoulli，1654～1705）即詹姆斯·伯努利，瑞士数学家，26，31，85，223，226～288
伯努利，约翰（Jahann I.Bernoulli，1667～1748）瑞士数学家，31，226，229
伯熙瓦（1981～ ）加拿大人，316，317，319
泊肃叶（Jean - Louis - Marie Poiseuille，1799～1869）法国医生，物理学家，239
博查德（Carl Wilhelm Borchardt，1814 或 1817～1880）德国数学家，196
博伊西斯（Boethius Anicius Manlius Torquatus Severinus，约 475 至 480～524 至 526）罗马数学，哲学，政治家，178
布尔诺（B.L.Burrow，约 20 世纪）当代数学家，227
布丰［Count（或 Comte）de Buffon，1707～1788］也译蒲丰，又名勒克朗谢［George（或 Georges）Louis Leclerc］法国科学家，138～140，142，278
布拉德瓦丁（Thomas Bradwardin，1300～1349）英国数学家，35
布拉赫，第谷［Tycho（或 Tvcho）Brahe，1546～1601］丹麦天文学，数学家，73，330
布拉克，珊卓（Sandra Bbllock）电影人物，269
布拉特纳，大卫（David Blatner）美国当代学者，电脑书籍作家，5，288
布莱泽（Robrt Blasler）当代美国律师，270，329
布朗（Robert Brown，1773～1858）英国植物学家，239
布劳威尔（Luitzen Egbertus Jan Brouwer，1881～1966）荷兰数学家，44
布雷特（Jean Brette）法国数学家，259
布里阿德（I.Bulliadus，1605～1694）法国天文学，物理学家，226
布里洛，约翰 美国当代学者，269
布里森（Bryson，约公元前 5 世纪）古希腊数学家，79，178，278
布龙克尔（Lord William Brouncker，1620～1684）英国数学家，37，108，151，206
布塞卡见布泽盖格尔
布特奥（Jean Buteo，1492～

1572）葡萄牙（?）数学家，179
布特勒尔，米夫（Miff Butler）美国工程师，204
布泽盖格尔（Buzengeiger，18 世纪）即布塞卡或克林斯根蒂纳（?）数学家，131，167

C

蔡邕（133～192）中国汉代数学家，69
蔡志杰 中国当代儿童，287，288
岑建功（约 18 世纪）中国清代学者，10，301
查尔特斯（R. Chartres，19～20 世纪）现代数学家，145
查奇，冯（F.X.von Zach，18～19 世纪）英国数学家，117
查什（Pliny E. Chase，19～20 世纪）美国法学博士，数学家，198，330
柴田昭彦 日本当代学者，277
陈厚耀（1648～1772）中国清代数学家，115
陈际新（18 世纪）中国清代数学家，158
陈荩谟（约 17 世纪）中国明代数学家，71，100，336
陈景润（1933～1996）中国数学家，297
陈开明 中国当代学者，107
陈省身（1911～2004）美籍华裔数学家，155，238，296
陈昭银 中国当代教师，215
陈兆弘 中国当代学者，246
陈志文 中国当代人，267
程大位（1533～1593）中国明代数学家，13，100
程纶 中国学者，301
村松茂清（Muramatsu Ssigekiyo，17 世纪）日本数学家，81

D

达尔文（Charles Robert Darwin，1809～1882）英国生物学家，184
达什［John M.Zacharias（或 Zachavas）Dase，1824～1861］德国数学家，118，332
达特（Francis Michael Darter）73，336
达特卡（J.Dutka）美国当代数学家，44
大雄见马哈维拉
戴德金（Julins Wilhelm Richard Dedekind，1831～1916）德国数学家，38
戴法兴（约 5 世纪）中国南北朝

时期学者，305
戴维斯，菲利浦（John Davis）当代学者，281
戴维斯，约翰（John Davis，约19世纪）62，337
戴煦（1805～1860）中国清代数学家，159，160
戴震（1722～1777）中国清代数学家，305
丹尼肯，冯，厄里希（20世纪）瑞士人，323～325
但丁（Dante Alighièri，1265～1321）意大利诗人，180，276
道纳德见科诺思
德拉克（S.M.Drach，19世纪）英国学者，75，331
邓玉函（Jean Terrenz 或 Joannes Termenz，1576～1630）瑞士（一说德国）传教士，100
狄查姆（Dichampt，20世纪）法国数学家，125
狄多女王　罗马史诗中非洲迦太基国的首任女王，258，259
狄考文（R.Mateer，19世纪后期）美国传教士，28
狄诺斯特拉托斯（Dinostratus，前4世纪）古希腊数学家，176，191
笛卡儿（René Descartes，1596～1650）法国数学家，35，181
棣莫弗（Abraham de Moivre，1667～1754）法国数学家，230
丁取忠（1810～1877）中国清代数学家，115，158
丢番图［Diophantus（或Diophantus of Alexandria），约246～330］古希腊数学家，83
董光璧 中国当代学者，294
董佑诚（1791～1823）中国清代数学家，158，159
杜德利（20世纪）59，61，184，329
杜德美［Pierre（或 Petrus）Jartoux，1668或1670～1720或1730］法国传教士，157～159
杜勒（Albrecht Durer，1471～1528）艺术家，179
杜致礼（？～2003）杨振宁的夫人，272
渡边一（1767～1839）日本数学家，154
多禄某见托勒密

E

恩格斯（Friedrich Eegels，1820～1895）德国，马克思主义创始人之一，24，150

F

法格纳诺（Giulio Carlo de' Toschi

de' Count Fagnano, 1682～1766）意大利数学家，5
樊晓 中国当代人，285
范塞楞见鲁道夫
梵藏见婆罗摩笈多
方以智（1611～1671）中国明清哲学家，思想家，数学家，13，61，69，100，330
方中通（1633～1698）中国清代数学家，61
芳旦娜 法国当代数学家，42
菲尔兹（John Charles Fields，1863～1932）加拿大数学家，204
菲特烈大帝（1712～1786）普鲁士（今属德国）皇帝，37
菲因（John Phin，19～20世纪）现代学者，146
斐波那契［Leonarod Fibonacci，1170～1230或1175～1250］意大利数学家，即皮舍诺（Leonarod Pisano）或比萨·皮舍诺［Leonarod da Pisa（或 Leonarod of Pisa）74，336
费尔通（Felton Pegasus，20世纪）英国当代数学家，123，333
费兰提（Isidoro Ferrante）意大利（?）诗人，254
费里德（Filliatre）法国当代数学家，125
费马（Pierre de Fermat，1601～1665）法国数学家，181，225，228
芬克尔，拉菲尔 当代数学家，127
芬尼［Orontius（或 Oronce 或 Orons）Finaeus（或 Fine），1494～1555］法国数学家，179
芬奇，达（Leonardo da Vinci，1452～1519）意大利科学家，艺术家，179，192，231
芬奇，西蒙 当代英国书商，84
大朗和费（Joseph von Fraunhofer，1787～1826）德国物理学家，239
弗尔德林见弗格森（?）
弗格森（D.F.Fe rguson）即弗尔德林（?）英国数学家，41，120，121，332
弗兰科（Franco of Liege，11世纪）比利时人，60，337
弗郎西斯，圣 法语常用人名，6
弗朗丢斯（Sextus Julius Frontinus，约40～103）古罗马建筑师，80
弗朗西斯卡（Piero della Francesca，约15世纪）画家，80
伏洛克（Alexander Volokh）288

福克斯（19～20 世纪）英国学者，142，336
傅里叶［Jean - Baptiste - Joseph - Fourier（或 Jean Baphiste Joeph Fourier），1768～1830］法国数学家，125，156，171，237，295

G

嘎乌波莫（Гаусбом）苏联当代数学家，144
盖尔德（Jacob de Gelder）德国数学家，197，198
盖尔丰德（Александр Осипович Гельфонд，1906～1968 苏联数学家，202，203，230
盖莫夫（George Gamow，1904～1968）美籍乌克兰核物理学，宇宙学家和科普作家，138，139
高桥大介（Daisuke Takahashi）日本当代数学家，136，137，335
高斯（Carl Friedrich Gauss，1777～1855）德国数学家，29，83，118，120，122，124，125，126，137，142，143，167，289，290
戈涅西（约 10 世纪前后）印度数学家，291
哥德巴赫（Christian Goldbach，1690～1764）德国数学家，26，225，296
哥德尔（Kurt Gödel，1906～1978）奥地利数学家，293
哥斯佩尔（W. Jr. Gosper，20 世纪）美国数学家，130，132，334
歌德（Johann Wolfgang von Goethe，1749～1832）德国诗人，316
格雷戈里，达维德（David Gregory，1611～1708），苏格兰数学家，25
格雷戈里，文克恩特（Gregorg of St. Vincent，1584～1667）比利时耶稣教会会士，数学家，179
格雷戈里，詹姆斯（James Gregory，1638～1675）苏格兰数学家，25，36，108～110，113，114，126，150，155，160，165
格列汉（虚构人物）216
格林贝格（Grienberger）意大利数学家，107，114，331
格诺斯维纳（Cyrus Pitt Grosvenor）美国数学家，197，198，336
古德曼，埃德温［Edwin J. Goldman（一说 Gooldwin，译为古德文）

19～20 世纪］美国医学博士，256，319～321
古尔德（Sylvester Clark Gould，1840～1909）美国《评论和质疑》的编辑，184
古郡解（17～18 世纪）日本数学家，75，336
古郡之政（17 世纪）日本数学家，17，81，95
固灵见鲁道夫
顾长发（17～18 世纪）中国清代数学家，69
关孝和（Seki Kowa，1639 至 1642～1708）日本数学家，95，104，116，117，314，331
果尔丹（Paul Albert Gordan，1837～1912）德国数学家，40
郭守敬（1231～1316）中国元代科学家，11，52，54，55，97
郭书春（1941～ ）中国当代数学史家，88，92，246，310，313
郭焱 湖北省残疾儿童康复中心的教师，283

H

哈代（Godfrey Harold Hardy，1877～1947）英国数学家，199
哈顿（Charles Hutton，1737～1823）英国数学家，166
哈佛——约翰·哈佛（John Harvard，1608～1638）出生在英国的传教士，美国教育家，27，297
哈根（Gotthilf Hagen，1797～1884）德国物理学家，239
哈肯（Wolfgan Haken）美国数学家，46
哈雷（Edmund Halley，1656～1742）英国天文学，数学家，113
哈里奥特（Thomas Harriot，1560～1621）英国数学家，35
哈密顿（William Rowan Hamilton，1805～1865）英国科学家，38，69
哈齐达基斯（Niko laos Hatzidakis）希腊（?）诗人，254
哈特（H. 哈特）美国学者，273
海伦［Hero（或 Heron of Alexandria），约前 1 世纪（一说 4 世纪）］又译亚历山大里亚的海伦，古希腊数学家，80
海涅（Heinrich Evduard Heine，1821～1881）德国数学家，38
海塞尔（Carl Theadore Heisel，约 20 世纪）美国学者，67，256
海森堡（Werner Karl Heisenberg，1901～1976）德国物理学家，239

海亚姆（Omar Khayyam，约1049～1122至1131）波斯数学家，诗人，194
汉安帝（100年前后）10
汉谟拉比（？～约前1750）古巴比伦的统治者，50
汉斯　英国地球科学家，265
何承天（370－447）东晋南北朝时期数学家，12，13，19，72，336
何国宗（？～1766）中国清代数学家，115
和田宁［Wada Yasusi（或Wada Nei），1787～1840］日本数学家，161
赫里岗（Pierre Herigone，17世纪）法国数学家，29
赫塞（Hesse，18世纪）德国数学家，74，330
赫师慎（L.van Hée）耶稣会神父，312
亨利三世（1551～1559）法国国王，105
亨利四世（1553～1610）法国国王，105
侯晓荣　中国当代数学家，190
忽必烈（Qubilai，1215～1294）中国元代皇帝元世祖，55
胡夫（Khufu，约前2590～前2568）又译库夫或库孚，希腊名歧奥普斯（Cheops）古埃及第四王朝法老，321～323
胡格赫斯（T.M.Hughes）英国数学家，200，335
花拉子米（Abū Jacfar Muhammad ibn Mūsā al－Khwārizmī，780至783～835至850）阿拉伯数学家，63，76，80，92
华罗庚（1910～1985）中国现代数学家，18，19，206，246，283，286，301，309
华生威勒（M.de Vausenville）法国人，182
华特曼（M.S.Waterman）当代数学家，44
黄宗宪（19世纪）中国清代数学家，115，116，167
会田安明（Aida Yasuaki，1747～1817）日本数学家，162，164
惠帝　即晋惠帝（300前后）中国三国时期晋国皇帝，304
惠更斯（Christiaan Huygens，1629～1695）荷兰物理学家，数学家，61，102，107，179，181
惠施（前370～前310）中国战国时期哲学家，291
霍布森（Ernest William Hobson，

1856～1933）英国数学家，198，336
霍布斯（Thomas Hobbes，1588～1679）英国哲学家，61，63，184，185，337
霍尔（A. G. Hall，19～20 世纪）数学家，214
霍尔斯特德（G.B.Halsted，19～20 世纪）数学家，214
霍尔维兹（Leonid Hurwicz，20 世纪）美国数学家，40

J

吉拜斯，李奥 当代数学家，127
吉布斯（Josiah Willard Gibbs，1839～1904）美国数学家，27
吉劳德［Jean Guilloud（或 Guillard）1923～ ］法国当代数学家，42，123～126，333
吉利斯皮（C.C.Gillispie）美国历史学家，99
吉努斯，弗朗索瓦（Francois Genus，1927～ ）法国数学家，123，333
纪氏 中国古代临川人，60，330
加德纳，马丁（Martin Gardner，1914～ ）美国数学家，科普作家，185，244，264，265，270，289
伽利略（Galileo Galilei，1564～1642）意大利科学家，181
嘉晃田村见田村芳昭
伽罗瓦（Evaristc Galois，1811～1832）法国数学家，188，240，241，265
贾宝玉《红楼梦》中的人物，325
建部贤弘［Takebe Hikojirō Kenkō（或 Takebe Katahiro 或 Tatebe Kenko），1664～1739］即建部砚湖，日本数学家，116，117，161，164，165，331
建部砚湖见建部贤弘
姜岌（?）中国古代人，15，18
杰勒尔（Jeenl）美国当代数学家，123，333
今士见鲁道夫
金田安政见金田康正
金田吉政见金田康正
金田康正（Yasumasa Kanada，1949～ ）即金田安政，金田吉政，廉正蒲田，Y. 卡尼达，日本当代数学家，44，129，131～134，136～138，280，333～335
敬之后藤（Hiroyuki Goto）日本当代人，285
久留岛义太（Kurusima Yosihiro，？～1757）日本数学家，117

久仲山（Kazahika Nakayama，20世纪）日本当代数学家，131，333
居里夫人——玛丽·居里（Marie Curie，1867～1934）原名斯克罗多夫斯卡（Manya Sklodowska）波兰-法国科学家，294
居特里，弗朗西斯（Francis Guthrie，1831～1899）弗勒德里克·居特里的哥哥，英国数学家，182
居特里，弗勒德里克（Fredrick Guthrie，1833～1866）弗朗西斯·居特里的弟弟，英国物理学，化学家，182

K

Kendo，Takebe（约18世纪）日本学者，159
Kubo 日本当代数学家，133，334
卡达耶夫（Валентин Петрович Катаев 1897～?）俄国剧作家，184
卡勒特（J.F.Callet，18～19世纪）法国数学家，117，332
卡里克（Alick Carrick，19世纪）英国学者，80
卡尼达，Y. 见金田康正
卡斯纳（Edward Kasner）美国当代数学家，57，229，276
卡斯帕洛夫 苏联-俄罗斯当代国际象棋大师，279
卡斯特纳（Abraham Gotgelf Kästney，1719～1800）德国数学家，29
卡塔尔迪（Pietro Antonio Cataldi，1548或1552～1626）意大利数学家，151
卡特（Harvey L.Carter）诗人，53
卡文德（Lawrence Cavender）当代学者，184
卡西，阿尔（Jemshîd al-Kashî，?～1429或1436）阿拉伯数学家，94，102～104，111，292，331
卡尤萨斯（Joseph-Louis Vincens de Mouleon de Causans）法国警卫官，58，180，337
卡约里（Florian Cajori，1859～1930）美国数学史家，27
开尔文见威廉·汤姆森
开普勒（Johannes Kepler，1571～1630）德国天文学家，数学家，73，291，292，296
坎帕纳斯（Johannes Campanus，13世纪）意大利数学家，80
康顿，爱德华（Edward Condon，19～20世纪）美国数学家，诗人，252

康托尔（Georg Cantor，1845～1918）德国数学家，38，203
康托尔（Moritz Benedikt Cantor，1829～1920）德国数学史家，292
康熙（皇帝）（1654～1722）中国清代清圣祖玄烨，63，69，101，115，158
柯朗（Richard Conrant，1888～1972）美籍德国数学家，1，279
柯梅，拉（19世纪，La Comme）法国打井者，68
柯西（Augustin Louis Cauchy，1789～1857）法国数学家，85
科汉斯基［Father（或Adam Adamovic）Kochansky，1631～1700）］波兰数学家，195，196，330
科林斯（John Collins，1625～1683）英国科学家，109
科诺思（Donald E.Knuth）即道纳德，美国当代数学家，131，333
科特斯（Roger Cotes，1682～1716）英国数学家，229
克莱因（Felix Klein，1849～1925）德国数学家，39，189，229，268
克劳森，托马斯（Thomas Clausen，1801～1885）丹麦或德国天文学家，118，166，332
克里克（Francis Harry Compton Crick，1916～2004）英国生化学家，294
克列尔（Augusf Leopold Crelle，1780～1855）德国工程师，数学家，196
克林斯根蒂纳见布泽盖格尔（?）
克罗内克（Leopold Kronecker，1823～1891）德国数学家，38，40
寇勒恩见鲁道夫
库茨（Maximilian Curtze，1837～1903）德国数学史家，94
库仑（Charles Augustin de Coulomb，1736～1806）法国物理学家，238
库默尔（Ernst Edward Kummer，1810～1893）德国数学家，228
库兹明（Родион Осиевич Кузьмин，1891～1949）苏联数学家，204

L

拉茨科维奇，米克洛什（M.Laczkovich，19～20世纪）匈牙利数学家，194
拉格朗日（Joseph Louis Lagrange，1736～1813）法国数学家37，38，207

拉勒特，德恩汉姆（Denham Larrett，19～20 世纪）数学家，250
拉马努金（Srinivasa Aaiyangar Ramanujan，1887～1920）印度数学家，130，133，162，163，165，199，243，269，286，331，334
拉尼，德［Thomas Fanteet（或 Fantet）de Lagny，1660～1734］法国数学家，36，117，332
拉兹里尼（Lazzerini，19～20 世纪）意大利数学家，141，142
莱布尼茨［Gottfried Wilhelm von Leibniz（或 Leibnitz），1646～1716］德国数学家，31，36，84，108～110，113，155～157，161，164～166，181，279
莱伊提库斯（Georg Joachim Rhaeticus，1514～1574 或 1576）德国数学家，94
莱茵特见兰德
兰伯特（Johann Heinrich Lambert，1728～1777）瑞士－法国－德国数学家，31，36，37，189，202，207
兰德（A.Henry Rhind，19 世纪）又译莱茵特，爱尔兰古董商，65～67，174
兰兹（David Lantz）西班牙（?）诗人，254
朗尼（S.L.Loney，19～20 世纪）数学家，214
朗斯基，赫奈（Hoene Joseph Maria Wronsky，1776～1853）波兰数学家，5
劳勒（Robert Lawlor）当代数学家，194
勒克朗谢　布丰的别名
勒让德（Adrien Marie Legendre，1752～1833）法国数学家，27，37，39，40，118，137，167，202，295
雷勃尼科夫（Константин Алексеевич Рыбников，1913～　）苏联数学史家，299
雷恩奇　即小伦奇（John William Wrench，1911～　）美国当代数学家，120，121，124，289，332，333
雷格蒙塔努斯见约翰·穆勒
雷科德（Taylor Record，19～20 世纪）美国印第安纳州议员，320
雷曼（Lehmann）19 世纪数学家，332
雷歇　误说是黎赫特，见该条

黎赫特［Richter，（或 Recher?）? ～1854］即雷歇（?），德国（?）数学家，误说是黎赫特（Jean Richter，1537～1616）捷克数学家，119，332
黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826～1866）德国数学家，228，296
李柏钧　现代电脑工作者，281
李淳风（604～672）中国唐代数学家，17，18，301，302，304～306，311
李迪 中国当代数学史家，301
李潢（? ～1811 或 1812）中国清代数学家，11，301，304
李籍（约 11 世纪）中国北宋数学家，12，301，312
李善兰（1811～1882）中国清代数学家，28，100，161，162，164
李时珍（1518～1593）中国明代医学家，99
李天经（1579～1659）中国明清时期科学家，100
李文军（1944～　）中国现代学者，167，169，170，246，290
李新洲　中国当代学者，23
李俨（1892～1963）中国数学史家，9，10，70，101，301，312
李毓佩　中国当代学者，78
李约瑟（1901～1995）英国生化学，科学史家，54，55，60，98，301，312
里克斯（H.E.Licks，19～20 世纪）数学家，诗人，252
丽拉瓦提（12 世纪）印度人，婆什迦罗的妻子或第二个女儿，14，17，92
励乃骥　中国当代学者，62，301，302
利根，詹姆斯数学家，232
利马窦（Matteo Ricci 或 Matthoeus Ricci，1529 或 1552～1610）意大利传教士，100
廉正莆田见金田康正
镰田俊清（Kamata Toshikiyo，（? ～1749）日本数学家，106，162，164，331
梁建平 中国当代学者，290
梁宗巨（1924～1995）中国数学史家，15，18，20，21，65，312，323
林黛玉《红楼梦》中的人物，325
林德曼［Carl Lous Ferdinand Lindemann（或 Lindeman），1852～1939］德国数学家，39，40，188，203，319，326
林鹤一（Hayashi Tsuruichi，1873～

1935）日本数学家，159
林科棠　中国现代学者，15
刘贝贝　中国当代人，284，285
刘秉忠（约13世纪）中国元代科学家，55
刘徽（约3世纪）中国魏晋时期数学家，8，11，23，33，54，63，70，82，86～92，97，98，215，267，278，279，292，300～307，330，335
刘维尔（Joseph Liouville，1809～1882）法国数学家，46，202，203，278
刘向（约前1世纪）中国汉代数学家，71，336
刘歆（约公元前50～公元23）中国汉代数学家，9，10，13，54，70，71，300，301，305，336，337
刘永锡（19世纪后期）中国清代数学家，28
刘玉瑛 中国当代学者，117
刘子华（1899～1992）中国学者，327
卢瑟福，威廉（William Rutherford，1798～1871），英国数学，天文学家 118，119，332
卢肇　中国唐代学者，70
鲁柏　法国数学家，240，241
鲁道夫（van Ceulen Ludolph，1540～1610）也译鲁多尔夫，固灵，范·西尤莲，范塞楞，寇勒恩，今士，荷兰-德国数学家，22，73，101，105，106，119，124，151，203，299，300，331
鲁多尔夫见鲁道夫
鲁菲尼（Paolo Ruffini，1765～1822）意大利数学家，29
鲁提斯（Frankos Von Luttich，约11世纪）德国学者，178
鲁伊利尔（Simon Antuan Jan L' Huillier，1750～1840）瑞士数学家，202
陆柱家　中国当代数学家，317
陆绩（3世纪）中国三国时期吴国数学家，12，14。
鹿角理三吉（Kazunori Miyoshi）日本当代数学家，131，333
路易大王见路易十四
路易十四（1638～1715）即路易大王，法国皇帝，101
吕子方 中国现代学者，309
伦敦，杰克（Jack London，1876～1916）美国作家，216
伦泽尔（Gottfried Lenzer，19～20世纪）美国人，72，330
罗别克（T.E.Lobeck）245

罗滨逊 英国当代数学家，124，333
罗罕侯爵（16～17世纪）法国人，105
罗杰斯，威尔（Will Rogers）23
罗曼（Adrianus van Romanus，1561～1615）即范·罗曼或罗曼纽斯，荷兰－比利时数学家，102，105，111，331
罗曼纽斯见罗曼
罗密士（Elias Loomis，1811～1899）美国传教士，28，161
罗斯（Klaus Friedrich Roth，1925～ ）英籍德国数学家，204
罗斯福（Franklin Delano Roosevelt，1882～1945）美国总统，137
罗素（Bertrand Russell，1872～1970）英国数学家，哲学家，47
落下闳（约前157～前87）中国西汉天文学家，313
洛利亚（Gino Loria，1862～1953或1954）意大利数学家，310

M

马多克——J. 马多克（20世纪）美国当代学者，141
马尔苏龙（Malthulon，18世纪）法国人，179，180
马哈德万，拉詹（Rajan Mahadevan，20世纪）印度当代人，285
马哈维拉［Mahavīra（或Mahavira），约9世纪］印度数学家，又译大雄或摩诃毗罗，52，59，60，62，329
马赫勒尔（Kurt Mahler，1903～?）又译马乐或马赫勒，英国数学家，46
马克思（Karl Marx，1818～1883）德国人，马克思主义创始人之一，30，276
马拉卡尔勒（Malacarne）意大利人，53，182
马青（John Machin，1680至1685～1751至1752）英国科学家，112～114，119，120，123，127，131，135，136，166，283，331
马塞拉斯（Marcellus，约公元前268～前208）古罗马将领，84
马斯凯罗尼（Lorenzo Mascheroni，1750～1800）意大利数学家，190
马修斯，罗伯特，英国当代数学家，266
马兹（Roger Martz）当代美国联邦调查局探员，270，330

迈蒙拉比（Rabbi Moshe ben Maimon, 1135～1204）又名伦班（Rombam）或迈蒙尼德（Maimonides）51，80
迈特罗伯里斯（N.C.Metropolis）当代美国数学家，122，332
麦克劳林（Colin Maclaurin, 1698～1746）苏格兰数学家，205
麦克斯韦（James Clerk Maxwell, 1831～1879）英国物理学，数学家，156，239
毛雷尔　德国当代驻华大使馆人员，30
毛氏　中国古代学者，305
茅盾（1896～1981）沈雁冰的笔名，中国文学家，286
茅以升（1896～1989）中国桥梁学家，9，15～18，49，60，63，65，99，211，283，285，286，301
梅比乌斯（Augustus Ferdinand Möbius, 1790～1868）德国数学家，268
梅蒂尤斯（5种外文名见153，1543～1620，1527～1607两说）即安托尼兹（?）法国或德国数学家，15，17，94，95，298，299，309，335
梅蒂尤斯（Adrien Metius, 1571～1635）得出355/113那个梅蒂尤斯（1543～1620或1527～1607）的儿子，法国或德国数学家，17，298
梅珏成（1681～1763）中国清代数学家，75，115，157
梅雷（H.C.R.Mérag, 1835～1911）法国数学家，38
梅里尔（Helen A.Merrill, 19～20世纪）美国数学家，200，201，252，330
梅荣照（1935～　）中国学者，23，98
梅文鼎（1633～1721）中国明末清初数学家，75，115，312，331
蒙丢克拉［Jean-Etienne（或 Jean E' tienne）Montucla, 1725～1799］法国数学家，179，180，191
米迦勒　神话中的天使，74
米塞尔 法国人，241
明安图（? ～约1765）中国清代数学家，115，158，159
明茨　评论化圆为方的学者，185
明新（约18世纪）中国清代学者，158
摩尔根，德（Augustus De

Morgan，1806～1871）即 D. 莫尔干，英国数学家，42，69，142，161，180，182，183，223，256
摩诃毗罗见马哈维拉
莫尔（George Mohr，1647～1697）丹麦数学家，190
莫尔干，D. 见摩尔根
墨子（约前 468～前 376）中国战国初期思想家，32
默冬（Meton，公元前 460～？）古希腊天文学家，176
穆拉里（Bruno Murari）美国数学家，272
穆勒，约翰［Johannes（或 Johann）Müller，1436～1476］笔名雷格蒙塔努斯（Johannes Regiomontanus），旧译玉山若干，德国科学家，71，72，93，181，336
穆尼阁（Jean Nicolas Smogolenski，1611～1656）波兰传教士，101

N

拿破仑（Napoléon I，1769～1821）即拿破仑一世，法国皇帝，102
纳林（J.Narrien）英国人，54，55，100
娜摩吉利 神话中的女神，163
南怀仁［Ferdinand（或 Ferdinandus）Verbiest，1623～1688］比利时传教士，101
内塞尔曼（G.H.F.Nesselmann，1811～1881）数学史家，83
尼古拉第二（尼古拉·伯努利）（Nicolas Bernoulli，1687～1759）瑞士数学家，26
尼古拉第三（尼古拉·伯努利）（Nicolas Bernoulli，1695～1726）瑞士数学家，226
尼古拉第一（1662～1716）瑞士数学家，26
尼古拉斯，库萨，德（Nicholas of Cusa，1401～1464）德国数学家，71，73，93，181，291，330
尼科尔森（Nicholson）美国当代数学家，123，333
尼科里（Nicoli，18 世纪）法国人，179
尼科梅德斯［Nicomedes（或 Nicomedan），约前 2 世纪］古希腊数学家，61
尼拉堪塔（Nilakantha，约 15～16 世纪）印度数学家，36，102，331
牛顿（Isaac Nneton，1643～1727）英国科学家，25，31，

36，83，109～112，127，156～158，161，162，164，171，181，229，265，331
纽康（Simon Newcomb，1835～1909）美国天文学家，276
纽曼（James Newman）美国当代数学家，57，230，276，297
努涅斯［Pedro（或 Peturs）Nunes，1502～1578］葡萄牙数学家，179
诺亚（Nöah）又译挪亚或诺厄，《圣经》中人类的新始祖，324
诺伊曼，冯［John von Neumann（或 Newmann），或 Johann von Neumann，1903～1957］美国当代数学家，122，332

O

欧德缪斯（Eudemus of Rhodes，活动于前 335 年的前后）古希腊数学家，186
欧多克索斯（Eudoxus of Cnidos，约前 408 至 400～前 355 至 347）古希腊数学家，35，51，178，215，278
欧尔（A.C.Orr，19～20 世纪）美国学者，247
欧几里得（Euclid，约公元前 335 至 330～前 275）古希腊数学家，1，32，35，80，185，186，190，265，295，296，312
欧拉（Leonhard Euler，1707～1783）瑞士数学家，26，31，36～38，40，44，117，118，151，152，156，157，159，161，164～166，168，169，171，202，203，206，213，223～225，227，229，238，265，279
欧姆，马丁（Martin Ohm，1792～1872）德国数学家，西蒙·欧姆的弟弟，231
欧姆，西蒙（Georg Simon Ohm，1787～1854）德国物理学家，马丁·欧姆的哥哥，231

P

帕波斯（Pappus of Alexandria，约 300～350）古希腊数学家，176
帕克尔（Johu Parker）75，335
帕帕斯——T．帕帕斯，美国当代学者，科普作家，279
帕乔利（Luca Pacioli 或 Luca Paciuolo，1445～1514）意大利数学家，231
帕斯贝格（Passberg）丹麦人，73
帕斯卡（Blaise Pascal，1623～

1662）法国科学家，36
潘承彪 中国当代数学家，317
庞加莱（Henri Poincare，1854～1912）法国数学家，物理学家，277，293
庞朴 中国当代历史学家，286
庞斯列（Jean - Victor Poncelet，1788～1867）法国数学家，190
佩多 美国当代数学家，190
佩鲁茨（M.F.Perutz，1914～ ）英国籍奥地利生化学家，293
皮尔斯（Benjamin Peirce，1809～1880）美国天文学，数学家，27
皮舍诺见斐波那契
皮延宗（约5世纪）中国南北朝时期数学家，12，13，54，300
平尼（Gregory Pinney）288
婆罗摩笈多（Prahmagupta，约598～660）即梵藏，印度数学家，62，80
婆什迦罗（Bhaskara Acharya，1114或1115～1178至1185）即婆什迦罗二世（600年前后，印度有另一数学家婆什迦罗一世），巴斯卡拉二世，印度王，印度数学家，14，17，62，86，92
婆什迦罗二世 见婆什迦罗
蒲柏，亚历山大（Alexander Pope，1688～1744），英国诗人，180
蒲松龄（1640～1715）中国清代文学家，287
普利斯顿（Richard Preston）美国当代数学家，48
普法夫（Joham Friedrich Pfaff，1765～1825）德国数学家，157，162，164
普林尼［Gaius Secundusder（Äetere）Plinus，23～79］即大普林尼［他的侄儿和继子称小普林尼（约61～114）］古罗马军事将领，博物学家，83
普洛菲，西蒙（Simon Plouffe）加拿大当代数学家，148，149，285，290
普塞洛斯（Michael Constantine Psellus）拜占庭思想家，58，329

Q

齐格蒙弟（Richard Zsigmondy，1865～1929）瑞士物理学家，239
歧奥普斯 见胡夫
契斯（Mike Keith）诗人，251
钱宝琮（1892～1974）中国数学

家，10，12，13，63，70，100，116，159，301，312
钱乐之（约5世纪）中国南朝时期宋科学家，52
钱塘（约17世纪）中国清代数学家，63
钱伟长（1912～ ）中国当代科学家，301
切比雪夫（Пафнутий Львович Чебю ш е вэ，1821～1894）俄国数学家，291
秦九韶（约1202或1209～约1261）中国南宋数学家，11，50，63，80
琼斯，威廉（William Jones，1675～1749）英国数学家，作家，26～28
丘成桐（1949～ ）美籍华裔数学家，273，291
丘德诺夫斯基，达维德（David V. Chudnovskys，1933～ ）格雷戈里·丘德诺夫斯基的哥哥，苏联-美国数学家，133～135，334，335
丘德诺夫斯基，格雷戈里（Gregory V. Chudnovskys，1938～ ）达维德·丘德诺夫斯基的弟弟，苏联－美国数学家，133～135，334，335

R

阮元（1764～1849）中国清代数学家，14，63
芮特威斯伦（Ggorge Reitwiesner）当代美国数学家，122，332

S

Sanso，Muramatsu's，13
萨本（James Sabben）74，336
萨多色各（Sato Seiko，17世纪）日本数学家，81
萨根，卡尔（Carl Eduard Sagan，1934～1996）美国科学家，科普作家，270
塞迪约（L.P.E.A.Sédillot）法国人，54
塞涅卡（约前4～65，Lucius Annaeus Seneca）古罗马哲学家，298
塞韦里（Francesco Severi，1879～1961）意大利数学家，190
赛勒斯（Oliver de Serres）法国人，53
三好和宪（1946～ ）日本数学家，131，333
三上义夫（Yoshio Mikami，1875～1950）日本数学史家，13，15～17，20，21，159，301
三宅贤隆（17～18世纪）日本数

学家，75，335
瑟厄（19～20 世纪）也译图埃，数学家，204
沙夫（William L.Schaaf）24
沙拉明，欧仁（Eugene Salamin）当代数学家，126，127，129，131
山克斯，丹尼尔［Daniel（或 Danie）Shanks，1917～］美国数学家，124，289，333
山克斯，威廉（William Shanks，1812～1882）英国数学家，7，41，42，119，120，123，282，332
商高（约前 11 世纪）中国周朝数学家，8
舍普勒（Herman C. Schepler）德国数学史家，12，14，15，30，71，92，119，299
申博尔斯卡，维斯瓦娃（1923～ ）波兰诗人，256
沈括（1031～1095）中国北宋科学家，52，97，309
生福维（19 世纪后期）中国清代数学家，28
圣使见阿利亚巴塔
施奈德（Theodor Schneider，1911～ ）德国数学家，204
石黑信基（1836～1869）日本数学家，155
石申（约前 4 世纪）中国战国中期魏国天文学家，11
史密斯，达维德（David Eugene Smith，1860～1944），美国数学史家，9，14，15，30
史密斯，亨利（Henry John Stephen Smith，1826～1883）英国数学家，142，336
史密斯　华盛顿有史密斯研究所，125
史密斯，列维（Levi Smith）美国当代数学家，121，332
史密斯　英国爱丁堡大学天文学家，324
史密斯，詹姆斯（James Smith，19 世纪）英国数学家，68，69，183，184
史坦因（Sherman K.Stein）29
舒伯特（Hermenn Schubert，19 世纪后期～20 世纪前期）53，181，182
司马炎（3 世纪）中国三国时期魏（晋）国皇帝，301，302
斯波克　科幻小说中的人物，268
斯蒂费尔（Mihael Stiffel，1486 或 1487～1567）德国数学家，35，68
斯蒂文（Simon Stevin，1548～

1620）荷兰物理学，数学家，35
斯吕塞（R.F.de Sluse，1622～1685）181
斯莫卢霍夫斯基（M.von Smoluchowski，1872～1917）波兰物理学家，239
斯涅耳（Willebrord Snellius，1580～1626）荷兰－德国天文学，物理学，数学家，107，181
斯佩特（Specht）德国数学家，196，198，201，330
斯泰纳（Jacob Steinet，1796～1863）瑞士籍德国数学家，190，196，274
斯坦娜　美国当代记忆学专家，288
斯坦维尔（J.de Stainville，约18世纪）数学家，156，157，159
斯特拉斯尼茨基［L.K.Schulz von Strassnitzky（或 Stassnitzky）］德国数学家，118，332
斯特拉逊　德国当代数学家，127
斯特林（James Stirling，1692或1696～1770）苏格兰数学家，230，231
斯图姆［Johann Christoff（或 Christoph）Sturm，1635～1703］德国数学家，26
斯托比亚斯（Stobaeus，约500前后）古希腊数学家，295
斯托尔兹（Otto Stolz，1842～1905）德国数学家，38
斯托克斯（George Gabriel Stokes，1819～1903）英国物理学，数学家，239
斯托默（Carl Friedrich Müvierth Störmer，1874～1957）挪威数学家，124，125，167，169，289
斯托帕特（Tom Stoppard）当代剧作家，184
松永良弼（Matsunaga Ryōhitsu，1692至1694～1744至1748）日本数学家，116，117，162，331
宋君荣（A.Gaubil）法国人，54
苏本　德国人，211
苏轼（1037～1101）中国北宋诗人，13
孙炽甫　中国现代数学家，15，70，301
孙皓（3世纪）中国三国时期吴国君主（264～277在位）300
孙行者，神话人物，即孙悟空，98
孙义勇　中国当代山东聊城东阿县村医，284

所罗门王《旧约全书》中的人物，50

T

Takebe Kendo 见 Kendo，Takebe

塔尔伯特（R.F.Talbot）当代数学家，227

塔尔斯基（Alfred Tarski，1901 或 1902～1983）波兰数学家，193，194

塔曼特，丹尼尔　当代英国人，284

泰奥多勒斯（Theodorus of Cyrene，约前 5 世纪末）古希腊数学家，34

泰勒（19 世纪）英国人，324

泰勒斯（Thales，约前 625～前 547）古希腊科学家，186，290

泰雅王　罗马史诗中的罗马皇帝，258

谈泰（约 18 世纪）中国清代学者，56，57，63，65，146

谭如波　坦普尔的汉名

坦普尔（Robert K.G.Temple）汉名谭如波，美国记者，21，54，81，93

汤姆森，威廉（William Thompson，1824～1907）爱尔兰物理学，数学家，封为爵士后叫开尔文，詹姆斯·汤姆森的弟弟，214，293

汤姆森，詹姆斯（James Thompson，1822～1892）爱尔兰工程师，化学家，威廉·汤姆森的哥哥，214

汤若望［Joannes（或 Jean）Adam Schall von Bell（或 Bee），1591～1666］德国传教士，100，101

汤晓　中国西部一农民的代名，318，319

唐锡克（Tobias Dantzig）当代数学家，189

特拉贡伊斯姆斯（Tetragonismus，15～16 世纪）意大利（?）数学家，80，179

田川吉明见田村芳昭

田村芳昭（Yoshiaki Tamura）即田川吉明或嘉晃田村，日本当代数学家，131～134，333～335

托尔斯泰——列夫·托尔斯泰（Лев Николаевеч Толстой，1828～1910）俄国作家，257，258

托来末见托勒密

托勒密［Claudius Ptolemy（或 Ptolemaeus），约 90～168］或

多禄某，托来未，波托雷梅，古希腊天文学，数学家，8，9，85，86，94，181，310，330，336

U

Ushiro 日本当代数学家，131，334

V

V.J.，61，330

W

瓦尔多（C.A.Waldo，19～20世纪）美国数学教授，321
瓦拉哈米希拉［Varāhamihira（或Varahamihira），约6世纪］印度天文学，数学家，62
万户（约1500前后）中国明代木匠（或官名），11
万泽尔（Pierre Laurent Wantzel，1814～1848）法国数学家，188
王蕃（228或229～259至268）中国三国时期吴国数学家，13，14，54，69，70，300，301，336
王立争 中国当代人，285
王莽（前45～公元23）中国西汉皇帝，9，10，70，302，303，304
王申怀 中国当代学者，49
王锡阐（1628～1682）中国清代数学家，93
王孝通（约7世纪）中国唐代数学家，311
王选（1937～ ）中国当代科学家，296
王恂（1235～1281）中国元代科学家52，55
王应麟（1223～1296）中国宋代数学家，312
王毓乾 中国武汉大学当代学生，267
王元启（1714～1786）中国清代数学家，63
旺克勒利希，马文（Marvin Wunclerlich）美国当代数学家，241
威尔吉 古罗马诗人，258
威加，乔治（Georg Vega，1754或1756～1802）即凯洛格·冯·贝格（?）奥地利数学家，另一说为冯·威加（von Vega）英国人（可能国籍有误）117，166，167，332
威克斯特罗姆（Frank Wikström）255
威廉姆斯，卡罗斯·威廉姆（19～20世纪）美国诗人，6
韦伯（Weber，1842～1913）德国

数学家，29
韦伯　美国犹他州奥格登的韦伯国立大学学者，141
韦达［Francois（或François）Vièta（或Viète），1540～1603］法国数学家，102，104，105，108，152，153，181，293，331
韦法，阿布（Abul Wefa Mohammed ben Mohammed，或Abul wefa，或Abū al-wafa，940～998或997）阿拉伯数学家，189
维特鲁维厄斯（Marcus Vitruvius Pollio，公元前2～前1世纪）即比特尔－比乌斯（?）罗马建筑学，数学家，67，68
维特斯（St.Vitus，19世纪）183
维维亚尼（Vincenzo Viviani，1622～1703）意大利物理学家，181
伟烈亚力（Alexander Wylie，1815～1887）英国传教士，100，160
魏尔斯特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstrass，1815～1897）德国数学家，38，40
文帝　即宋文帝（407～453）中国南朝宋皇帝刘义隆，52
沃尔夫（19世纪）瑞士数学家，142
沃利斯（John Wallis，1616～1703）英国数学家，25，35，61，108，112，151，153，155，160，181，184，185，206，279
乌尔班四世（Urban Ⅳ，13世纪）1261～1264年间的罗马教皇，80
乌格利迪西——I. 乌格利迪西（al-Uqlīdisī，约10世纪）阿拉伯数学家，104
吴文俊（1929～　）中国当代数学家，99，313

X

西登托普夫（H.F.E.Siedentopf，1872～1940）瑞士物理学家，239
西格尔（Carl Ludwig Siegel，1896～1981）德国数学家，204
西蒙尼，查理　当代数学家，127
西区考克（Alfred Hitchcock）英国电影制片人，269
西塞罗（Cicero，前106～前43）古罗马政治家，财税官，作家，84
西尤莲，范见鲁道夫
希波克拉底（Hippocrates of Chios，约前5世纪下半叶）古

希腊数学家，176，177
希尔伯特（David Hilbert，1862～1943）德国数学家，40，147，202，203，204，205，294，296
希罗多德（公元前484～前425）古希腊数学家，322
希帕索斯（Hippasus of Metapontum，约公元前5世纪）古希腊数学家，33，34，39
希皮亚斯（Hippias of Elis，公元前460～?）古希腊数学家，175，191
希思（Seath Thomas Little Heath，1861～1940）英国数学史家，191
席泽宗　中国当代科学史家，99
夏鸾翔（1823～1864）中国清代数学家，158，161，164
夏普（Abragam Sharp，1651或1653～1742）英国数学家，112～114，117，156，164，331
夏娃　神话人物，255
项明达（1789～1850）中国清代数学家，158～160，165
小伦奇见雷恩奇
小明（化名）中国湖北天门当代儿童，283
解恩泽（1936～　）中国当代学者，16
辛普森——O.J.辛普森，当代美国人，270
邢云路（16～17世纪）中国明代数学家，63，65，100，146，330
匈哈格 德国当代数学家，127
休厄尔（1794～1866）英国哲学家，数学家，54，69
秀瓦普（Schwab，1743～1821）德国数学家，171
徐本顺　中国当代学者，16
徐光启（1562～1633）中国明代科学家，100
徐有壬（1800～1860）中国清代数学家，158，159，161，165
徐岳（约3世纪）中国东汉数学家，245
许纯舫　中国当代学者，301
许尔兹（Schultz）数学家，118，166
薛定谔（Erwin Schrödinger，1887～1961）奥地利物理学家，239
雪莱（Percy Bysshe Shelley，1792～1822）英国诗人，7

Y

Yoshino　日本当代数学家，131，334

雅布王（约前 9 世纪）罗马史诗中非洲一个土著部落的酋长，258，259
雅可比［Carl（或 Karl）Gustav Jacob Jacobi，1804～1851］德国数学家，29，295
亚几默德见阿基米德
亚里士多德［Aristoteles（或 Aristotle），前 384 至 380～前 322］古希腊科学家，哲学家，34，178
亚氏见阿基米德
严敦杰（1917～1988）中国数学家，70，300
杨恭懿（1225～1294）中国元代科学家，52
杨辉（约 13 世纪）中国宋代数学家，245
杨路（1936～　）中国当代数学家，190
杨振宁（1922～　）当代美籍华人，272，273，293
耶稣（Jesus，公元前 30～前 6）或耶苏，传说或真实的基督教信奉的救世主，常与基督连用，称基督耶稣或耶稣基督，157，179，312，324
一行（683 或 673～727）原名张遂，又名僧一行，中国唐代天文学家，佛学家，99
伊东　美国当代法官，270，330
伊夫斯（Howard Eves，约 20 世纪）美国数学史家，44，83，125，154，249，250，256
伊克（Simon van der Eycke）荷兰（?）数学家，72，73，336
伊诺皮迪斯（Oenopides of Chios，活动于前 465 年前后）古希腊数学家，186
礒村吉德（17 世纪）日本数学家，93
印度王见婆什迦罗
友寄英哲　日本当代人，285
有马赖僮（1714～1783）日本数学家，161
余宁生　中国现代学者，301
俞文鮅（20 世纪）中国当代学者，107
虞琪　中国当代学者，313
玉山若干见约翰·穆勒
袁士龙（17 世纪）中国清代数学家，69

Z

泽格（Monte Zerger）当代数学家，263
曾国藩（1811～1872）中国清代官员，115
曾纪鸿（1848～1877）中国清代

数学家，115，116，167
查有梁（1942～　）中国当代学者，313
斋藤宜义（1816～1889）日本数学家，155
詹姆斯，威廉（19～20世纪）数学家，121
张苍（约前250～前152）中国秦汉时期数学家，10
张诚（Jean François Gerbillon，1654～1707）法国传教士，101，115
张肱（约18世纪）即张良亭，中国清代学者，158
张衡（78～139）中国东汉科学家，10，11，54，62，64，99，300，305，336，337
张景中（1936～　）中国数学家，190，210，211
张良亭见张肱
张卓　中国当代人，285
章克标（1900～　）中国现代学者，18
赵孔挺　中国古代科学家，52
赵缭　中国现代学者，301
赵爽（约3世纪）中国三国时期吴国数学家，8
赵友钦（13～14世纪）中国元代数学家，35，96，97
郑太朴　中国近代学者，9
中山和彦（1934～　）日本数学家，131，333
钟道隆　中国当代军人，学者，283
钟祥李氏（约19世纪）中国清代学者，158
周公（约前11世纪）姓姬名旦，中国西周政治家，8
周弘　周婷婷的父亲，287
周婷婷（1980～　）中国人，287
周武帝（6世纪）中国南北朝时期北周的皇帝，312
朱鸿（19世纪）中国清代数学家，101，158，159，331
朱镕基　中国国务院原总理，283，286
朱载堉（1536～1595或1611或1614）中国明代数学家，72，100，336
庄亨阳（1686～1746）中国清代数学家，69
庄子（约前396～前286）中国战国时期哲学家，291
子由（1039～1112）即苏子由，苏轼的弟弟，中国北宋诗人，13
邹大海（1965～　）中国学者，9
邹立文（19世纪后期）中国清代

数学家，28
祖暅（5世纪末～6世纪初）中国南北朝时期科学家，59，93，98，107，215，306，311
祖冲之（429或430～500）中国南北朝时期科学家，10，11，14～21，54，55，59，70，75，78，80，93～99，102，151，206，263，292，294，301～306，308～314，318，327，328，331，335
左潜（?～1874）中国清代数学家，115，167

参考文献

J. M.Borwein 等 . 1993. Ramanujan, 模方程, π 的逼近或如何算出 π 的 10 亿位 . 数学译林, (2): 106

D.H.Bailey 等 .1997. 圆周率的探索 . 王天明等译 . 姚景齐校 . 数学译林, (3): 205

G.M.Phillips.1985. 阿基米德, 数学分析学者 . 王连芬译 . 数学通报, (3): 42

Herman C.Schepler.The Chronology of Pi.Mathematics Magazine, Jan. Feb. \ March. April. \ May. June. (1950), 165～170, 216～228, 279～283

阿梁 .1992. 令人惊异的数字记忆家 . 科学与生活, (4): 44

阿西莫夫 .1980. 数的趣谈 . 洪丕柱等译 . 上海: 上海科学技术出版社

白尚恕 .1979. 我国古代数学名著“九章算术”及其注释者刘徽 . 数学通报, (6): 28

白尚恕 .1980. 圆周率的名称及其符号 . 数学通报, (6): 27

别莱利曼 .1980. 趣味几何学 . 第 2 版 . 符其珣译 . 北京: 中国青年出版社

波克纳 .1992. 数学在科学起源中的作用 . 李家良译 . 长沙: 湖南教育出版社

陈国成等 .1982. 幼狮数学大辞典 . 台北: 幼狮文化事业公司

陈仁政 .1990. 纯数学推理的失误 . 百科知识, (6): 51

陈仁政 .1990. 漫谈两个著名超越数 . 数学通报, (1): 44

陈仁政 .1991-05-08. 计算机与数学谁促进了谁 . 中国电子报

陈仁政 .1994. 生物与黄金分割 . 科学世界, (11): 35

陈震寰 .1983-05-28. 一个算了 1500 年的数 . 北京电子报

陈震寰 .1985. 计算机的应用 . 北京：科学普及出版社
储聘梁 .1985. 有趣的 π. 科学画报，(9)：31
大卫·布拉特纳 .2003. 神奇的 π. 潘恩典译 . 汕头：汕头大学出版社
邓宗琦等 .1990. 数学家辞典 . 武汉：湖北教育出版社
丁永明 .1995. 圆周率和法律 . 读者，(10)：45
杜瑞之等 .1991. 简明数学史辞典 . 济南：山东教育出版社
杜石然等 .1982. 中国科学技术史稿·上 . 北京：科学出版社
盖莫夫 .1978. 从 1 到无穷大 . 暴永宁译 . 北京：科学出版社
龚升 .1964. 从刘徽割圆谈起 . 北京：人民教育出版社
顾钢 .1992-01-04. 有着超凡记忆的人 . 光明日报
郭书春 .1992-8-11 中华古算 成就辉煌 . 中国教育报
郭书春 .1992. 古代世界数学泰斗刘徽 . 济南：山东科学技术出版社
胡承明 1992. 译自［苏］知识就是力量 . 匈牙利数学家找到化圆为方的方法 . 大自然探索，(1)：93
华罗庚 .1951. 旧珍宝，新光芒 . 教师月报，(2)：23
华罗庚 .1964. 从祖冲之的圆周率谈起 . 新一版 . 北京：人民教育出版社
霍本格 .1979. 李韧等译 . 数学奇境 . 北京：科学出版社
简明不列颠百科全书编译组 .1985. 简明不列颠百科全书·5. 北京：中国大百科全书出版社
康子纯 .1980. 墓碑上的科学 . 科学画报，(6)：26
柯朗等 .1985. 数学是什么 . 左平等译 . 北京：科学出版社
克莱因 .1979. 古今数学思想 . 北京大学数学系数学史翻译组 . 上海：上海科学技术出版社
堀场芳数 .1998. π 的奥秘——从圆周率到统计 . 朴玉芬译 . 北京：科学出版社
李铭心等 .1991. 中学数学中的数学史 . 海口：南海出版公司
李勤 .1986. 法国少年科技宫（发现宫）简介 . 课堂内外，(6)：3 和封底
李天华等 .1989. 数学奇观 . 第 2 版 . 武汉：湖北少年儿童出版社

李文汉 .1981. 科学的发现·3. 北京：中国少年儿童出版社
李文汉 .1989. 中外割圆术的异同 . 中学生数学，(2)：11
李约瑟 .1978. 中国科学技术史·三卷 . 中国科学技术史翻译小组译 . 北京：科学出版社
李志昌 .1957. 数学史上关于π的计算公式的种种研究 . 数学通讯，(6)：1
梁绍鸿等 .1958. 初等数学复习与研究·平面几何 . 北京：人民教育出版社
梁宗巨 .1992. 数学历史典故 . 沈阳：辽宁教育出版社
林崇德等 .1994. 中国少年儿童百科全书·科学、技术 . 第 2 版 . 杭州：浙江教育出版社
林崇德等 .1994. 中国少年儿童百科全书·自然、环境 . 第 2 版 . 杭州：浙江教育出版社
刘长春 .1990. π的几种无限表达式 . 中等数学，(6)：28
刘文玉 .1997-7-29. 圆周率演算获重大突破 . 南方日报
流华 .1989. 神奇的数字记忆法 . 课堂内外（初中版），(4)：29
毛乾霖 .1985. π对计算机的挑战 . 科学画报，(6)：16
茅以升 .1917 年 4 月 . 中国圆周率略史 . 科学，(三卷四期)：411
莫由 .1980. 二十世纪的数学难题——希尔伯特的 23 个问题 . 科学画报，(4)：22
帕帕斯 .1998. 数学趣闻集锦 . 张远南等译 . 上海：上海教育出版社
钱宝琮 .1955. 圆周率 3927/1250 的作者究竟是谁？它是怎样得来的？. 数学通报，(5)：4
钱宝琮等 .1964. 中国数学史 . 北京：科学出版社
乔 .1991. 无限简单连分数 . 中学生数学，(3)：12
任其真 .1990.1989 年电子世界之最 . 电子世界，(1)：4
日本数学会 .1984. 数学百科辞典 . 科学出版社组织国内学者编译 . 北京：科学出版社
单墫 .1987. 趣味数论 . 北京：中国青年出版社
D.E. 史密斯等 .1930. 数论尺规作图及周率·圆周率π之历史及超绝性 .

郑太朴译．上海：商务印书馆
邵品琮．1981．有理数与连分数．数学通报，(12)：27
宋亮等．1994．高中地理快速记忆法．天津：天津教育出版社
孙炽甫．1955．中国古代数学家关于圆周率研究的成就．数学通报，(5)：5
孙东民．1997-12-14．圣者医未病之病．人民日报
田崎仁．1981．中学生的科学的学习方法．李铸译．北京：中国农业机械出版社
同济大学数学教研室．1978．高等数学．北京：人民教育出版社
王海秋．1995．论 π．数学教师，(5)：45
王申怀．1978．π 的数值是怎样计算出来的．中学理科教学，(5)：25
王梓坤．1978．科学发现纵横谈．上海：上海人民出版社
王梓坤等．1991．常用数学公式大全．重庆：重庆出版社
汪晓勤．2000．祖冲之圆周率在西方的历史境遇——纪念祖冲之逝世1500周年．自然杂志 (5)：300～304
吴鹤龄．1992．质数奇趣．知识就是力量，(11)：26
吴深德．1982．有启发性的类比法．数学通报，(3)：19
吴深德．1993．欧拉出奇制胜的一招．中学数学教学参考，(12)：34
吴振奎．2000．圆周率 π．中等数学，(5)：26
夏道行．1964．π 和 e．上海：上海教育出版社
肖文．1980．国际数学界的最高奖——菲尔兹奖和国际数学家大会．科学画报，(8)：25
解恩泽等．1987．简明自然科学史手册．济南：山东教育出版社
徐品方．1985．科学家的墓志铭．青年世界，(2)：45
许康等．1991．数学与美．成都：四川教育出版社
杨中和．1982．π 的历史．自然辩证法通讯，(2)：51 和 (3)：57
伊夫斯．1986．数学史概论．欧阳绛译．太原：山西经济出版社
伊夫斯．1990．数学史上的里程碑．欧阳绛等译．北京：科学技术出版社
易南轩．2004．数学美拾趣．第 2 版．北京：科学出版社
殷堰土．1997．富有奇趣的数——π．科学大观园，(6)：8

尹斌庸等 .1985. 古今数学趣话 . 成都：四川科学技术出版社
约翰逊等 .1980. 大家学数学 . 周焕山等译 . 北京：科学出版社
曾晓新 .1990. 数学的魅力 . 重庆：科学技术文献出版社重庆分社
张景中 .2002. 数学家的眼光 . 北京：中国少年儿童出版社
张绍东 .1997. 我国关于圆周率的研究 . 中学数学教学参考，（8-9 合）：94
张文忠 .1983. 数园撷英 . 北京：科学普及出版社
张远南 .1990. 数学故事丛书·偶然中的必然——概率的故事 . 上海：上海科学普及出版社
郑毓信 .1981.π的年表 . 数学通报，（8）：28
中国大百科全书编委会 .1988. 中国大百科全书·数学 . 北京：中国大百科全书出版社
中国科学院自然科学史研究所 .1983. 钱宝琮科学史论文选集 . 北京：科学出版社
《中学数学教师手册》编写组 .1985. 中学数学教师手册 . 上海：上海教育出版社
朱赉馨 .1993. 巧用圆周率——数学家破案的故事 . 数学教学通讯，（6）：39
朱根逸 .1995. 古往今来话π值 . 知识就是力量，（5）：34
朱学志等 .1990. 数学的历史、思想和方法 . 哈尔滨：哈尔滨出版社

后　记

1981年，我看到当年第8期《数学通报》上《π的年表》后，就想写一本全面介绍π的书。历经23载，到2004年11月22日，终于有了这引玉之砖。

在本书写作、出版的过程中，得到了科学出版社、国家图书馆、《数学通报》杂志社、自贡市图书馆、自贡农业学校图书馆，中国科学院自然科学史研究所郭书春及其学生邹大海、中国科学院成都分院计算机研究所张景中、辽宁师范大学梁宗巨及其学生王青建和他们的家人、华东师范大学张奠宙、四川省社会科学院查有梁、成都大学丘和、天津商学院吴振奎、合肥教育学院曾润生、四川理工学院周仁庚、黎克麟、黄蕴魁、自贡农业学校彭定才、张志强、自贡二中黎国胜、自贡一中林静、科学出版社李敏、四川科学技术出版社陈敦和、张俊、郑尧，德国驻华大使馆毛雷尔等单位或先生、女士无私、真诚有效的指教或帮助。限于水平和篇幅，难以卒述，谨在此对他们表示最真诚的、永远的感谢。

我还感谢参加编写此书的以下学者：(排名不分先后）陈梅、李文军、陈立、陈仕达、陈雪、陈楠、郭

汉卿、宋光辉、秦添、梁聪、谢久明、曾品中、潘宁、黎渝、王传平、罗锋、张云杰、徐先辉、徐仲先、黄新。

本书参考、引用了书末所列参考文献以及限于篇幅未能列出的其他或各种媒体的内容。在此，对上述全部媒体的作者和出版者表示衷心的感谢，并对未列出媒体名称的作者和出版者表示深深的歉意。

由于作者水平及资料的限制，书中不妥、谬误之处，切盼读者指正。

陈仁政

2004年11月22日于四川自贡